Problema PTC0004-31

Una señal senoidal de 1 Khz y 1 voltio de amplitud modula en frecuencia una portadora senoidal de 10 Khz y 10 voltios de amplitud. La desviación en frecuencia es de 5 Khz. Determinar el espectro de la señal modulada. Repetir el cálculo para distintas desviaciones de frecuencia.

Solución PTC0004-31

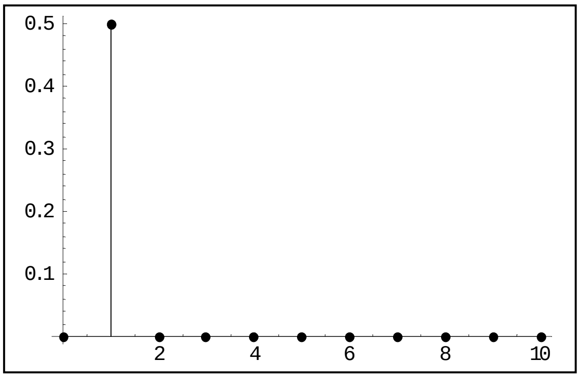
Según se puede calcular (ver problema PTC0004-07) la señal modulante es una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = A\cos(\omega_f t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes son nulos excepto para

$$c_{fn} = \frac{AT_f}{2} \quad \forall n = \pm 1$$

por lo que el espectro de amplitud de la señal modulante para frecuencias positivas es el siguiente



Para calcular los armónicos recordaremos que cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{|c_n|}{T_f} + \frac{|c_{-n}|}{T_f} \quad \forall n > 0$$

En este caso sólo existe el armónico de orden 1, que vale

$$M_{f1} = \frac{|c_1|}{T_f} + \frac{|c_{-1}|}{T_f} = \frac{1}{T_f}\frac{AT_f}{2} + \frac{1}{T_f}\frac{AT_f}{2} = A$$

Si el osciloscopio representa el valor de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{fnRMS}}{1}$$

$$\begin{cases} M_{fndBV_{RMS}} = 20\log\dfrac{M_{fn}}{\sqrt{2}} & \forall n > 0 \\ M_{fndBV_{RMS}} = 20\log M_{fn} & \forall n = 0 \end{cases}$$

Lo que se traduce en nuestro caso en la tabla siguiente

Frecuencia	Armónico
1 Khz.	-3.01 dBV

Llamando *g(t)* a la señal modulada sabemos que

$$g(t) = A_p \cos\left[\theta(t)\right]$$

El ángulo de la expresión anterior está ligado con la frecuencia instantánea mediante

$$\omega_i = 2\pi f_i \equiv \frac{d\theta(t)}{dt}$$

o, inversamente,

$$\theta(t) = \int \omega_i dt = \int 2\pi f_i dt$$

expresión en el que la frecuencia instantánea vale

$$f_i = f_p + k \cdot f(t) = f_p + k \cdot A\cos\left(2\pi f_f t\right)$$

La máxima desviación de la pulsación angular (y de frecuencia) se produce cuando el coseno en la expresión anterior vale *1* (o *-1*), por lo que podemos calcular la constante mediante

$$k \cdot A = \Delta f$$

$$k = \frac{\Delta f}{A}$$

Sustituyendo tenemos

$$f_i = f_p + \frac{\Delta f}{A} \cdot A\cos\left(2\pi f_f t\right) = f_p + \Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right)$$

El ángulo vale pues

$$\theta(t) = \int 2\pi f_i dt = \int 2\pi\left[f_p + \Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right)\right] dt$$

$$\theta(t) = \int 2\pi f_p dt + \int 2\pi\Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right) dt$$

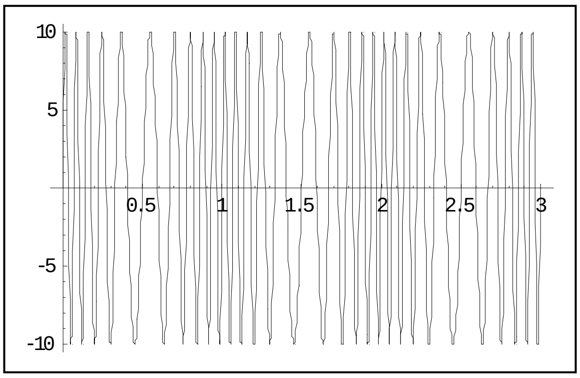
$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \frac{2\pi\Delta f}{2\pi f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right)$$

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right)$$

Por lo tanto la señal modulada en frecuencia vale

$$g(t) = A_p \cos\left[\theta(t)\right] = A_p \cos\left[2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right)\right]$$

Su representación gráfica para una desviación de frecuencia de 5 Khz es la siguiente



Por otra parte sabemos que la señal modulada en frecuencia admite un desarrollo en serie del tipo

$$\begin{aligned} g(t) = A_p J_0(\beta)\cos\left[\omega_p t\right] - A_p J_1(\beta)\left\{\cos\left[\left(\omega_p - \omega_f\right)t\right] - \cos\left[\left(\omega_p + \omega_f\right)t\right]\right\} \\ + A_p J_2(\beta)\left\{\cos\left[\left(\omega_p - 2\omega_f\right)t\right] - \cos\left[\left(\omega_p + 2\omega_f\right)t\right]\right\} \\ - A_p J_3(\beta)\left\{\cos\left[\left(\omega_p - 3\omega_f\right)t\right] - \cos\left[\left(\omega_p + 3\omega_f\right)t\right]\right\} \\ + \cdots \end{aligned}$$

Cada uno de esos sumandos supone un armónico de valor

$$M_{gn} = A_p J_n(\beta)$$

con un espectro que es simétrico y está centrado en la frecuencia portadora. En esta expresión se denomina

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_f} = \frac{\Delta f}{f_f}$$

al índice de modulación, y $J_n(\beta)$ a la función de Bessel de primera clase. En nuestro caso, se afirma en el enunciado que la desviación de frecuencia es de 5 kHz por lo que

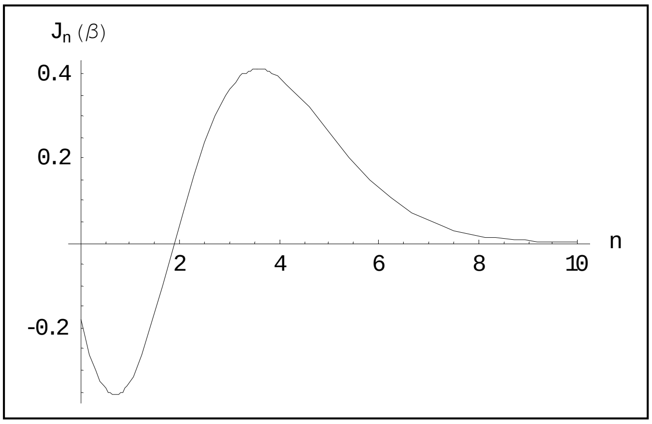
$$\Delta f = 5\,Khz$$

y, por tanto,

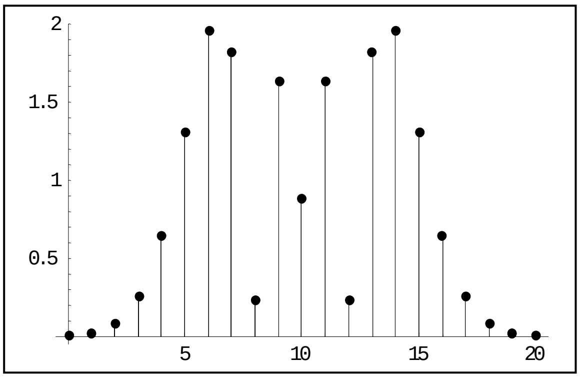
$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{5\,Khz}{1\,Khz} = 5$$

Las funciones de Bessel de primera clase para este índice de modulación, dependen exclusivamente de n, lo que se recoge en la tabla y gráfica siguientes:

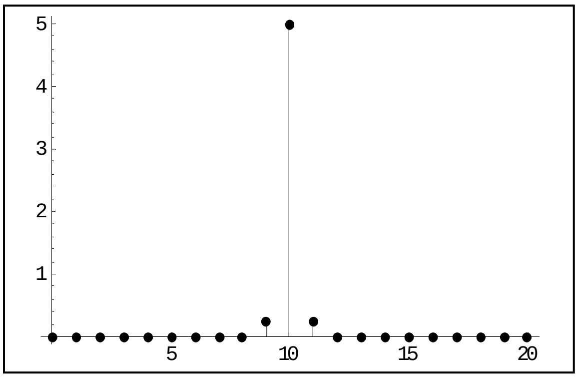
n	$J_n(\beta)$; β=1
0	-0,178
1	-0,328
2	0,047
3	0,365
4	0,391
5	0,261
6	0,131
7	0,053
8	0,018
9	0,006
10	0,001
11	-

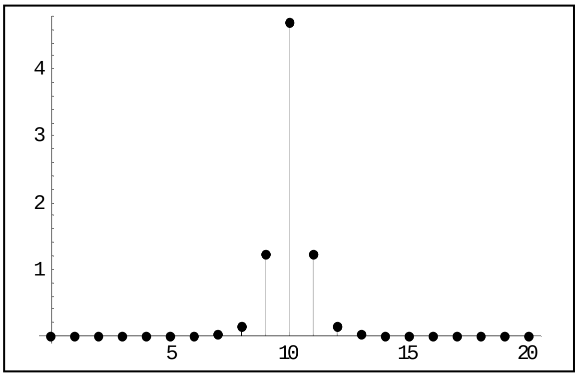


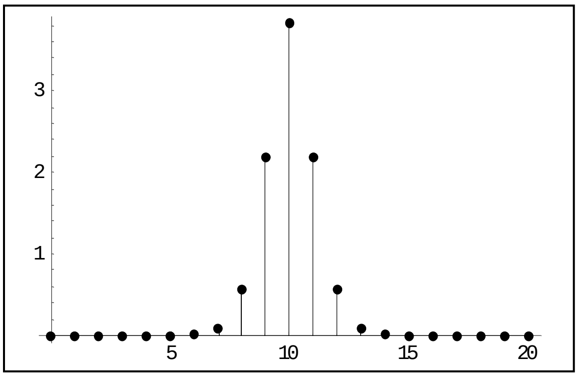
lo que, multiplicado por la amplitud de la portadora, nos da que el espectro de amplitud de la señal modulada para frecuencias positivas que es el siguiente

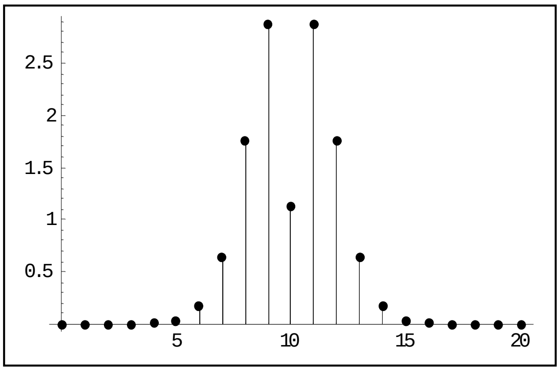


En las figuras siguientes se representan los espectros de las señales moduladas cuando la desviación de frecuencia es, respectivamente, de 0.1, 0.5, 1 y 2 Khz.









Los valores numéricos de los armónicos son

Frecuencia	**Armónicos (en dBV)**				
	Δf=0.1Khz	Δf=0.5Khz	Δf=1Khz	Δf=2Khz	Δf=5Khz
0 Khz.	-374,41	-234,67	-174,61	-115,00	-39,68
1 Khz.	-328,39	-202,63	-148,61	-95,08	-28,17
2 Khz.	-283,29	-171,51	-123,53	-76,09	-17,71
3 Khz.	-239,21	-141,42	-99,48	-58,15	-8,46
4 Khz.	-196,28	-112,48	-76,59	-41,41	-0,66
5 Khz.	-154,70	-84,89	-55,06	-26,06	5,33
6 Khz.	-114,70	-58,89	-35,13	-12,38	8,84
7 Khz.	-76,64	-34,83	-17,18	-0,80	8,23
8 Khz.	-41,08	-13,29	-1,80	7,94	-9,65
9 Khz.	-9,04	4,68	9,86	12,21	7,30
10 Khz.	16,97	16,44	14,67	3,99	1,98
11 Khz.	-9,04	4,68	9,86	12,21	7,30
12 Khz.	-41,08	-13,29	-1,80	7,94	-9,65
13 Khz.	-76,64	-34,83	-17,18	-0,80	8,23
14 Khz.	-114,70	-58,89	-35,13	-12,38	8,84
15 Khz.	-154,70	-84,89	-55,06	-26,06	5,33
16 Khz.	-196,28	-112,48	-76,59	-41,41	-0,66
17 Khz.	-239,21	-141,42	-99,48	-58,15	-8,46
18 Khz.	-283,29	-171,51	-123,53	-76,09	-17,71
19 Khz.	-328,39	-202,63	-148,61	-95,08	-28,17
20 Khz.	-374,41	-234,67	-174,61	-115,00	-39,68