Problema PTC0004-32

Una señal cuadrada de 1 Khz y 1 voltio de amplitud modula en frecuencia una portadora senoidal de 10 Khz y 10 voltios de amplitud. La desviación en frecuencia es de 5 Khz. Determinar el espectro de la señal modulada.

Solución PTC0004-32

Sabemos que la señal modulante puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{fn} e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_{fn} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Según se puede calcular (ver problema PTC0004-08)

$$c_{fn} = 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right) \quad \forall n > 0$$

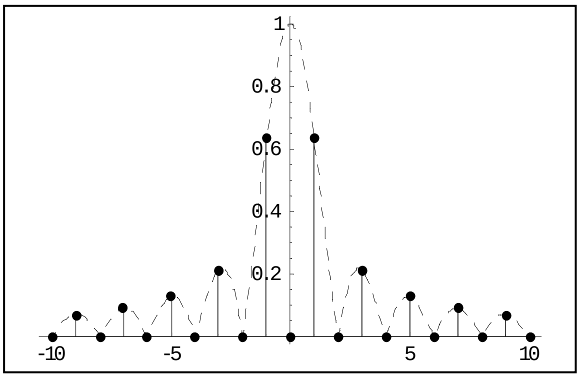
siendo *A* la amplitud de la señal cuadrada. Cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{|c_{fn}|}{T} + \frac{|c_{-fn}|}{T} \quad \forall n > 0$$

y sustituyendo

$$M_{fn} = \left|2ASa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

El espectro de amplitud se refleja en la figura siguiente



Para obtener los valores de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{fn}}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Los resultados son los siguientes

Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-∞
1	-0.91
2	-∞
3	-10.45
4	-∞
5	-14.89
6	-∞
7	-17.81
8	-∞
9	-20.00
10	-∞

Llamando *g(t)* a la señal modulada sabemos que

$$g(t) = A_p \cos\left[\theta(t)\right]$$

El ángulo de la expresión anterior está ligado con la frecuencia instantánea mediante

$$\omega_i = 2\pi f_i \equiv \frac{d\theta(t)}{dt}$$

o, inversamente,

$$\theta(t) = \int \omega_i dt = \int 2\pi f_i dt$$

expresión en el que la frecuencia instantánea vale

$$f_i = f_p + k \cdot f(t) = f_p + k \cdot A\cos\left(2\pi f_f t\right)$$

La máxima desviación de la pulsación angular (y de frecuencia) se produce cuando el coseno en la expresión anterior vale *1* (o *-1*), por lo que podemos calcular la constante mediante

$$k \cdot A = \Delta f$$

$$k = \frac{\Delta f}{A}$$

Sustituyendo tenemos

$$f_i = f_p + \frac{\Delta f}{A} \cdot A\cos\left(2\pi f_f t\right) = f_p + \Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right)$$

El ángulo vale pues

$$\theta(t) = \int 2\pi f_i dt = \int 2\pi \left[f_p + \Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right) \right] dt$$

$$\theta(t) = \int 2\pi f_p dt + \int 2\pi \Delta f \cos\left(2\pi f_f t\right) dt$$

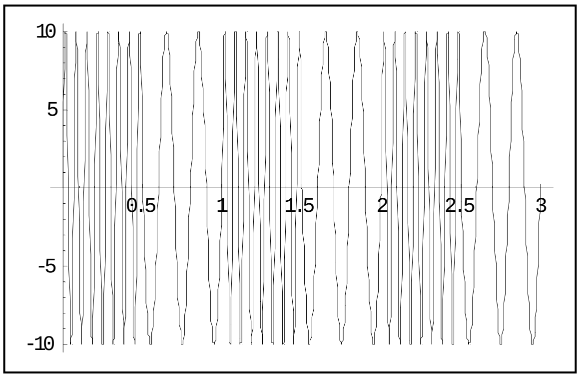
$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \frac{2\pi \Delta f}{2\pi f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right)$$

$$\theta(t) = 2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right)$$

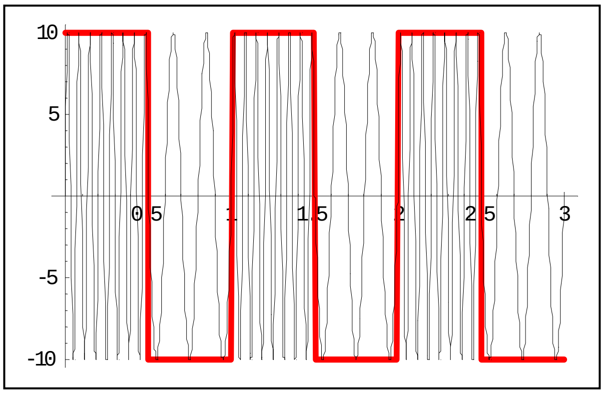
Por lo tanto la señal modulada en frecuencia vale

$$g(t) = A_p \cos\left[\theta(t)\right] = A_p \cos\left[2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_f} \operatorname{sen}\left(2\pi f_f t\right) \right]$$

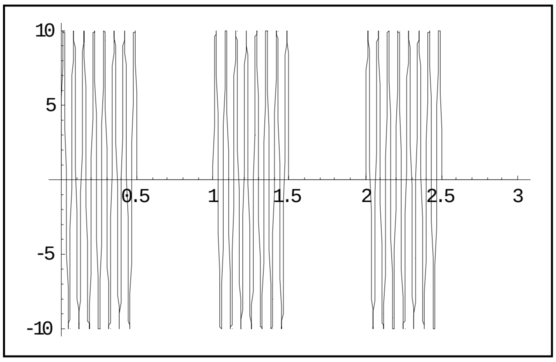
Su representación gráfica para una desviación de frecuencia de 5 Khz es la siguiente

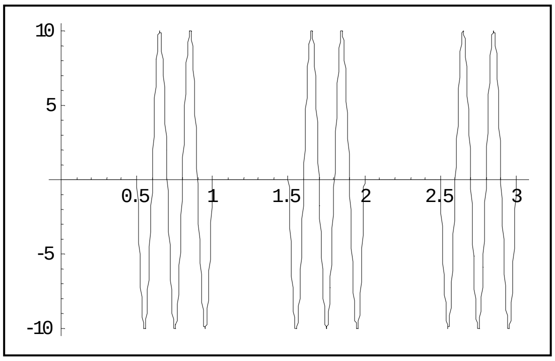


Podemos observar que la señal modulada hay momentos en los que se comporta como una senoide de frecuencia $f_p+\Delta f$ (15 Khz) y otros en los que se comporta como una senoide de frecuencia $f_p-\Delta f$ (5 Khz). Si superponemos la señal modulante (en rojo, escalas diferentes) al gráfico anterior podemos observar que la senoide de frecuencia $f_p+\Delta f$ (15 Khz) ocurre cuando la modulante $f(t)=1$, mientras que la senoide de frecuencia $f_p-\Delta f$ (5 Khz) ocurre cuando la modulante $f(t)=-1$.



Este hecho nos permite estudiar la modulación en frecuencia de una onda cuadrada como un conjunto de dos modulaciones en amplitud. En efecto, separemos los dos comportamientos de la señal modulada en dos funciones independientes $g_1(t)$ y $g_2(t)$ tal como aparecen en las figuras siguientes





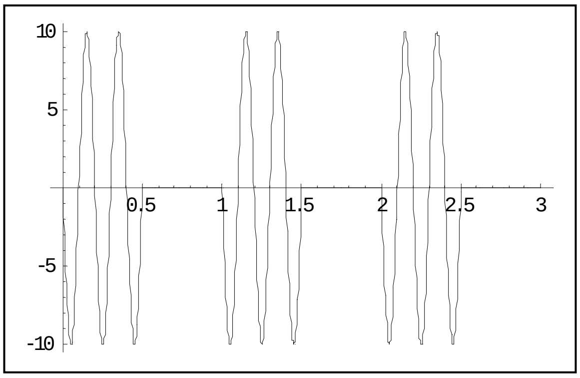
Se puede comprobar que

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

y que $g_1(t)$ se corresponde con una señal modulada en amplitud (índice de modulación unidad) con la misma modulante y con portadora de frecuencia $f_p+\Delta f$, y la mitad de amplitud (ver nota al final del problema).

$$g_1(t) = \frac{A_p}{2}\left[1 + f(t)\right]\text{sen}\left[2\pi\left(f_p + \Delta f\right)t\right]$$

Para que podamos hacer una operación similar con la función $g_2(t)$ hay primero que desplazarla en el tiempo una magnitud igual a un semiperíodo (es indiferente si a izquierda o a derecha). En la gráfica siguiente se representa la función $g_3(t)$ así obtenida.



Siendo

$$g_3(t) = g_2\left(t - \frac{T_m}{2}\right) = g_2\left(t - \frac{1}{2f_m}\right)$$

y, por tanto,

$$g_2(t) = g_3\left(t + \frac{1}{2f_m}\right)$$

Por otra parte vemos que $g_3(t)$ se corresponde con una señal modulada en amplitud (índice de modulación unidad) con la misma modulante y con portadora de frecuencia f_p-Δf, y la mitad de amplitud.

$$g_3(t) = \frac{A_p}{2}\left[1 + f(t)\right]\operatorname{sen}\left[2\pi\left(f_p - \Delta f\right)t\right]$$

Para el cálculo del espectro de amplitud de $g(t)$ recordamos que esta señal es la suma de $g_1(t)$ y $g_2(t)$ por lo que tenemos que sus armónicos son

$$M_{gn} = M_{g1n} + M_{g2n}$$

Por otra parte, $g_2(t)$ no es más que un desplazamiento en el tiempo de $g_3(t)$. Pero sabemos que los desplazamientos en el tiempo no alteran el espectro de amplitud (sólo el de fase), por lo que los armónicos de $g_2(t)$ coinciden con los de $g_3(t)$.

$$M_{g2n} = M_{g3n}$$

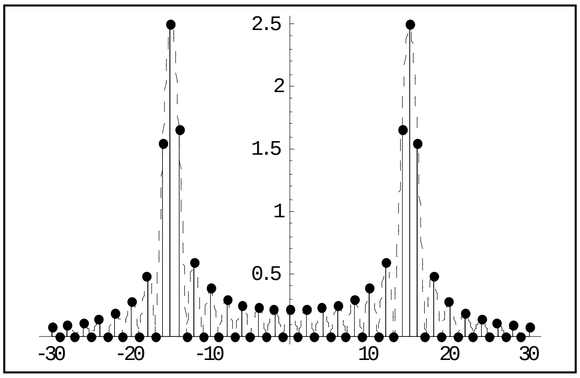
y sustituyendo nos queda finalmente que (ver nota al final del problema)

$$M_{gn} = M_{g1n} + M_{g3n}$$

Pero, como vimos en el problema PTC0004-29, los armónicos de una señal modulada en amplitud como $g_1(t)$ son

$$M_{g1n} = M_{pn} + \frac{\frac{1}{2}A_p}{2} M_{fn,f_p+\Delta f} + \frac{\frac{1}{2}A_p}{2} M_{fn,-f_p-\Delta f}$$

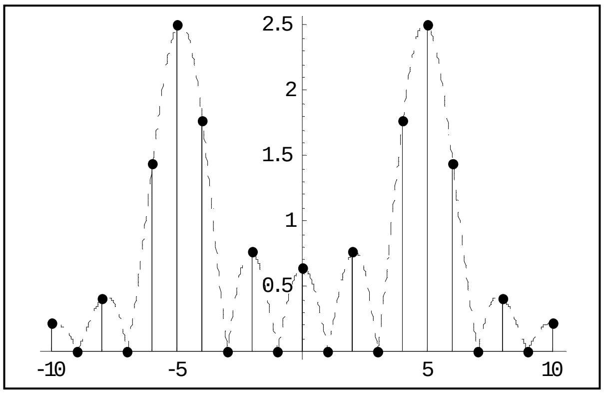
expresión en la que $M_{fn,fp+\Delta f}$ representa a los armónicos (bilaterales) correspondientes al espectro de la modulante centrado en $f_p+\Delta f$ y $M_{fn\text{-}fp\text{-}\Delta f}$ representa a los armónicos (bilaterales) correspondientes al espectro de la modulante centrado en $-f_p$-Δf. El espectro correspondiente a $g_1(t)$, centrado en la frecuencia $f_p+\Delta f$, es el siguiente



Análogamente, los armónicos de una señal modulada en amplitud como $g_3(t)$ son

$$M_{g3n} = M_{pn} + \frac{\frac{1}{2}A_p}{2} M_{fn,f_p-\Delta f} + \frac{\frac{1}{2}A_p}{2} M_{fn,-f_p+\Delta f}$$

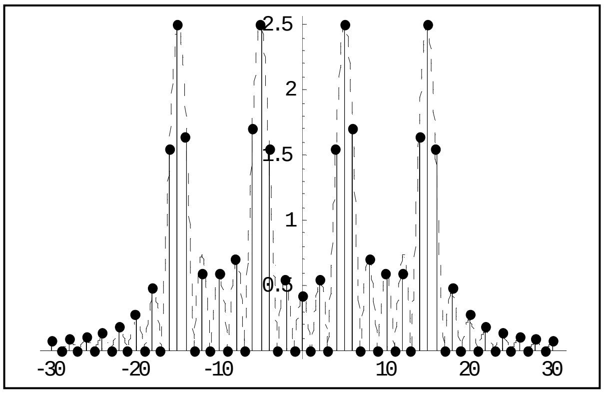
El espectro correspondiente a $g_3(t)$, centrado en la frecuencia f_p-Δf, es el siguiente



Por lo tanto, para la señal modulada en frecuencia *g(t)* cuyos armónicos valen

$$M_{gn} = M_{g1n} + M_{g3n}$$

el espectro resultante será la suma de los dos espectros parciales anteriores, lo que se refleja en la figura siguiente.



Los valores numéricos de los armónicos son

Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-4.43
1	-∞
2	-2.31
3	-∞
4	6.76
5	10.97
6	7.62
7	-∞
8	-0.03
9	-∞
10	-1.51
11	-∞
12	-1.58
13	-∞
14	7.34
15	10.97
16	6.76
17	-∞
18	-3.32
19	-∞
20	-8.27
21	-∞
22	-11.68
23	-∞
24	-14.32
25	-∞

NOTA: El cálculo realizado en este problema sólo es válido si la señal modulada en FM se puede descomponer, como hemos hecho, en dos señales moduladas en AM.

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

Sin embargo, para que esto ocurra, la portadora de frecuencia f_p+Δf, debe oscilar un número entero de veces en el tiempo que dura el período de la modulante. Es decir, que debe cumplirse que

$$\frac{f_p + \Delta f}{f_m} = n \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

Análogamente, la portadora de frecuencia f_p-Δf, debe oscilar también un número entero de veces en el tiempo que dura el período de la modulante. Es decir, que debe cumplirse también que

$$\frac{f_p - \Delta f}{f_m} = n \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

En el caso del enunciado del problema, ambas condiciones se cumplen ya que

$$\frac{f_p+\Delta f}{f_m}=\frac{10+5}{1}=15; \quad \frac{f_p-\Delta f}{f_m}=\frac{10-5}{1}=5$$

Por otra parte, se ha afirmado que los armónicos de la señal modulada FM se pueden obtener como suma de los armónicos de las señales AM

$$M_{gn}=M_{g1n}+M_{g2n}$$

Sin embargo, siendo rigurosos, lo que se suman son los coeficientes del desarrollo de Fourier (o los espectros), siendo éstos números complejos con módulo y argumento. Por tanto, para mayor precisión habría que escribir,

$$c_{gn}=c_{g1n}+c_{g2n}$$

Por otra parte los coeficientes de la señal desplazada en el tiempo, ven afectados sus coeficientes mediante la expresión

$$c_{g2n}=e^{j\omega\frac{T_m}{2}}c_{g3n}$$

lo que no afecta al espectro de amplitud pero sí al de fase y que en cualquier caso, puede alterar la suma

$$c_{gn}=c_{g1n}+e^{j\omega\frac{T_m}{2}}c_{g3n}$$

No obstante, si los espectros centrados en f_p+Δf y en f_p-Δf están suficientemente separados, la influencia mutua es pequeña y podemos mantener la aproximación

$$c_{gn}\approx c_{g1n}+c_{g3n}$$

o su equivalente

$$M_{gn}\approx M_{g1n}+M_{g3n}$$