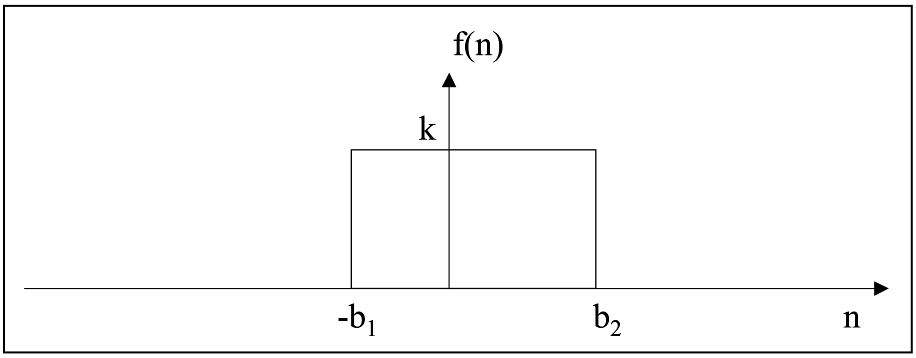
Problema PTC0004-34

Un sistema de comunicaciones codifica los bits en NRZ polar (+*A* voltios para el cero y –*A* voltios para el uno). Dicha transmisión se ve afectada por un ruido aleatorio con función de densidad uniforme entre $-b_1$ y $+b_2$ voltios. El receptor interpreta las tensiones mayores que *c* como un cero y las tensiones menores que *c* como un uno.

a) Determinar analítica y gráficamente la probabilidad de que se produzca un error en un bit en función exclusivamente de la relación señal-ruido en el canal.
b) Repetir el cálculo anterior para el caso de la probabilidad de error de un carácter en una transmisión asíncrona con 8 bits de datos, un bit de parada y sin bit de paridad.

Solución PTC0004-34

Apartado a)
Sea *n(t)* la función temporal correspondiente al ruido aleatorio. Denominemos *f(n)* a la función de densidad de probabilidad de dicho ruido. Su representación gráfica es la siguiente



En toda función de densidad de probabilidad se verifica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = 1$$

por lo que, en nuestro caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = \int_{-b_1}^{b_2} kdn = k\left[n\right]_{-b_1}^{b_2} = k\left[b_1 - (-b_2)\right] = k\left(b_1 + b_2\right) = 1$$

Esto nos conduce a que

$$k = \frac{1}{b_1 + b_2}$$

La media del ruido vale

$$\mu_b = \mu(n) = \int_{-\infty}^{\infty} nf(n)dn = k\int_{-b_1}^{b_2} ndn = k\left[\frac{n^2}{2}\right]_{-b_1}^{b_2} = k\left[\frac{b_2^2}{2} - \frac{(-b_1)^2}{2}\right] = k\left[\frac{b_2^2 - b_1^2}{2}\right]$$

$$\mu_b = k\frac{\left(b_2 + b_1\right)\left(b_2 - b_1\right)}{2} = \frac{1}{b_1 + b_2}\frac{\left(b_2 + b_1\right)\left(b_2 - b_1\right)}{2} = \frac{b_2 - b_1}{2}$$

Llamando b a la máxima separación de la media

$$b = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

podemos combinar esta expresión con la ecuación anterior para obtener

$$\begin{cases} b_2 - b_1 = 2\mu_b \\ b_2 + b_1 = 2b \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} -b_1 = \mu_b - b \\ b_2 = \mu_b + b \end{cases}$$

Sustituyendo en el valor de k tenemos

$$k = \frac{1}{-(\mu_b - b) + (\mu_b + b)} = \frac{1}{-\mu_b + b + \mu_b + b} = \frac{1}{2b}$$

La varianza del ruido vale

$$\sigma_b^2 = \sigma^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} [n - \mu_b]^2 f(n)dn = k \int_{-b_1}^{b_2} \left(n - \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^2 dn = \frac{k}{3} \left[\left(n - \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^3 \right]_{-b_1}^{b2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{k}{3} \left[\left(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^3 - \left(-b_1 - \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^3 \right] = \frac{k}{3} \left[\left(\frac{2b_2 - b_2 + b_1}{2} \right)^3 - \left(\frac{-2b_1 - b_2 + b_1}{2} \right)^3 \right]$$

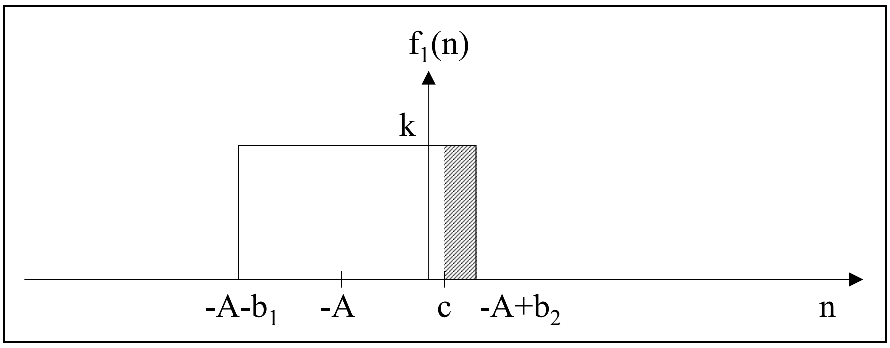
$$\sigma_b^2 = \frac{k}{3} \left[\left(\frac{b_2 + b_1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b_2 + b_1}{2} \right)^3 \right] = \frac{k}{3} \left[\left(\frac{b_2 + b_1}{2} \right)^3 + \left(\frac{b_2 + b_1}{2} \right)^3 \right]$$

Recordando el valor de k podemos escribir

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{3(b_1 + b_2)} \frac{(b_1 + b_2)^3}{4} = \frac{(b_1 + b_2)^2}{12}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[-(\mu_b - b) + (\mu_b + b) \right]^2}{12} = \frac{4b^2}{12} = \frac{b^2}{3}$$

Como el enunciado no afirma nada, supondremos que el ruido es aditivo. En ese caso, la función $f_1(n)$ de densidad de probabilidad cuando se transmite un 1 será como la de la figura

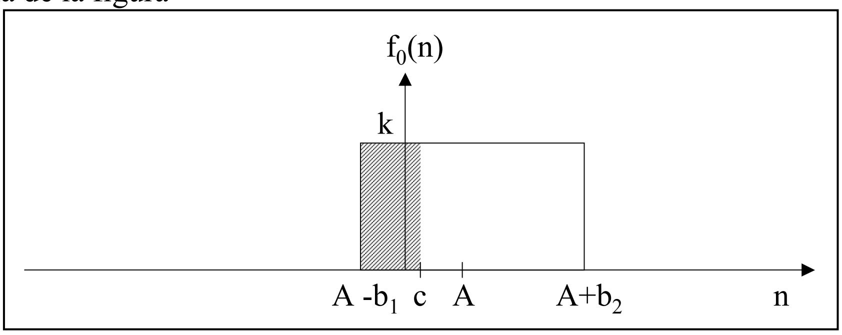


En esta gráfica el área rayada se corresponde con la probabilidad de que la señal en el receptor, después de que se la haya añadido el ruido del canal, sea mayor que *c*. Si suponemos que el receptor toma la decisión sobre el valor digital de la señal en función de que ésta sea mayor o menor que *c*, entonces el área rayada se corresponde con la probabilidad de que la señal sea recibida como un cero, cuando en realidad lo que se transmitió fue un uno. En definitiva el área señalada es la probabilidad de que se produzca un error en la transmisión cuando se envía un uno. Este probabilidad vale

$$P_{e1} = \int_{c}^{-A+b_1} f_1(n)dn = \int_{c}^{-A+b_1} kdn = k\left[n\right]_c^{-A+b_1} = k\left[-A+b_1-c\right]$$

$$P_{e1} = \frac{-A+b_1-c}{b_1+b_2} = \frac{-A-\mu_b+b-c}{-\mu_b+b+\mu_b+b} = \frac{-A-\mu_b+b-c}{2b}$$

Análogamente, la función $f_0(n)$ de densidad de probabilidad cuando se transmite un 0 será como la de la figura



En esta gráfica el área señalada es la probabilidad de que se produzca un error en la transmisión cuando se envía un cero. Este probabilidad vale

$$P_{e0} = \int_{A-b_1}^{c} f_0(n)dn = \int_{A-b_1}^{c} kdn = k\left[n\right]_{A-b_1}^{c} = k\left[c-\left(A-b_1\right)\right]$$

$$P_{e0} = \frac{c+b_2-A}{b_1+b_2} = \frac{c+\mu_b+b-A}{-\mu_b+b+\mu_b+b} = \frac{c+\mu_b+b-A}{2b}$$

Si denominamos P_0 a la probabilidad de que se transmita un cero y P_1 a la de que se transmita un uno, la probabilidad de error será

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

Si en promedio se transmiten el mismo número de ceros que de unos tenemos que

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

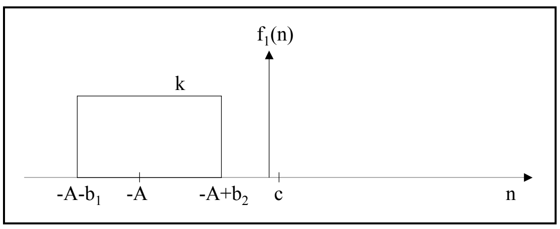
por lo que queda

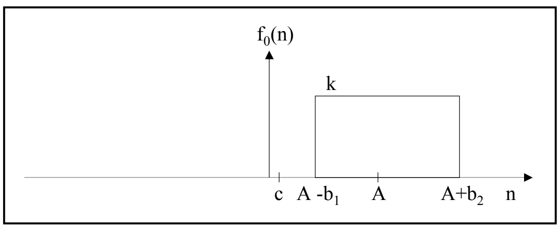
$$P_e = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} = \frac{1}{2}\left(P_{e0} + P_{e1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b_2-A}{b_1+b_2} + \frac{-A+b_1-c}{b_1+b_2}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b_2-A-A+b_1-c}{b_1+b_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1+b_2-2A}{b_1+b_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2A}{b_1+b_2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{A}{b_1+b_2}$$

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{A}{-\left(\mu_b - b\right)+\left(\mu_b + b\right)} = \frac{1}{2} - \frac{A}{2b}$$

Todo esto ocurre si, en el caso de transmisión del cero $A-b_1 < c$, o lo que es lo mismo $b_1 > A-c$; y en el caso de transmisión del uno $-A+b_2 > c$, o lo que es lo mismo $b_2 > A+c$. Si no se cumple la primera condición entonces $P_{e0} = 0$, mientras que si no se cumple la segunda entonces $P_{e1} = 0$. En estos casos, tenemos las situaciones de las figuras siguientes





en las que, obviamente,

$$P_e = P_{e0} = P_{e1} = 0$$

Es preciso ahora expresar ahora la probabilidad de error en función de la relación señal ruido (SNR). Sabemos que

$$SNR = \frac{S}{N}$$

Por una parte, la potencia de la señal S es fácil de calcular puesto que se trata de una señal digital de sólo dos valores ($+A$ y $-A$) y en ambos casos la potencia es la misma

$$S = A^2$$

Por otra parte, también sabemos que la potencia del ruido N es igual a la varianza (recordemos que el ruido es aleatorio), y que vale

$$N = \sigma^2(n) = \frac{b^2}{3}$$

Sustituyendo los valores de S y N tenemos

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{A^2}{\left(\frac{b^2}{3}\right)} = \frac{3A^2}{b^2}$$

Estamos ahora en condiciones de expresar la probabilidad de error en función de la SNR. En efecto, como vimos

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{A}{2b}$$

Pero de la expresión de la SNR podemos deducir

$$SNR = \frac{3A^2}{b^2}$$

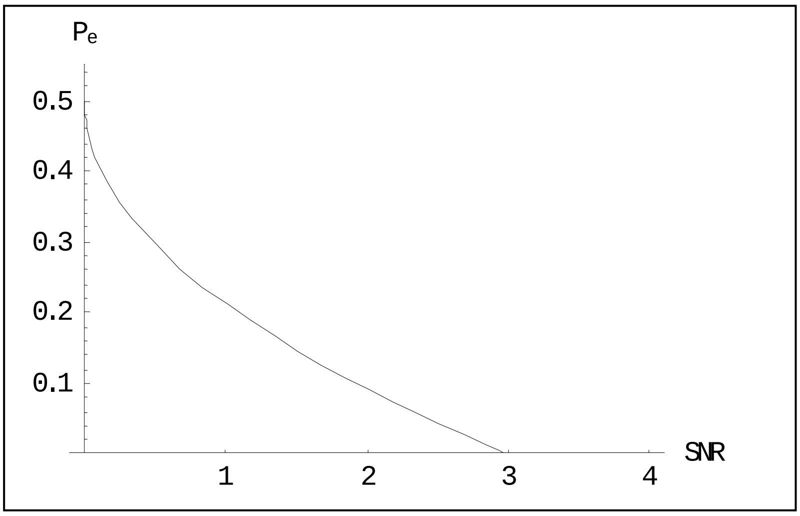
$$\frac{A^2}{b^2} = \frac{SNR}{3}$$

$$\frac{A}{b} = \sqrt{\frac{SNR}{3}}$$

por lo que sustituyendo obtenemos

$$P_e = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}$$

Gráficamente dicha expresión toma la siguiente forma



Si $b_1 < A-c; \quad b_2 > A+c$ entonces

$$P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e0}+P_{e1}\right) = \frac{1}{2}\left(0+P_{e1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-A+b_1-c}{b_1+b_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1-c}{b_1+b_2} - \frac{A}{b_1+b_2}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1-c}{b_1+b_2} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\mu_b+b-c}{2b} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right)$$

Si $b_1 > A-c; \quad b_2 < A+c$ entonces

$$P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e0}+P_{e1}\right) = \frac{1}{2}\left(P_{e0}+0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b_2-A}{b_1+b_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b_2}{b_1+b_2} - \frac{A}{b_1+b_2}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\frac{c+b_2}{b_1+b_2} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_b+b+c}{2b} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right)$$

Resumiendo los cuatro casos posibles tenemos

$$\begin{cases} 1: \quad b_1 > A-c; \quad b_2 > A+c \quad \rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{SNR}{12}} \\ 2: \quad b_1 < A-c; \quad b_2 > A+c \quad \rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2}\left(\frac{-\mu_b+b-c}{2b} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right) \\ 3: \quad b_1 > A-c; \quad b_2 < A+c \quad \rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_b+b+c}{2b} - \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right) \\ 4: \quad b_1 < A-c; \quad b_2 < A+c \quad \rightarrow \quad P_e = 0 \end{cases}$$

Apartado b)

En el caso un carácter en una transmisión asíncrona con 8 bits de datos, un bit de parada y sin bit de paridad debemos darnos cuentas que el carácter está formado por *n=10* bits

(1 de comienzo, 8 de datos y 1 de parada). La probabilidad de que se produzca un error en un carácter es la complementaria de que llegue un carácter correcto.

$$P_{ec} = 1 - \overline{P_{ec}}$$

La probabilidad de que llegue un carácter correcto es igual a la probabilidad de que lleguen correctos todos y cada uno de los *n* bits del carácter.

$$\overline{P_{ec}} = \overline{P_e} \cdot \overline{P_e} \cdot \overline{P_e} \cdots \overline{P_e} = \overline{P_e}^{\,n}$$

siendo la probabilidad de que llegue correcto un bit la complementaria de que llegue erróneo dicho bit

$$\overline{P_e} = 1 - P_e$$

Por tanto, sustituyendo,

$$P_{ec} = 1 - (1 - P_e)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{SNR}{12}}\right)^n$$

Gráficamente dicha expresión toma la siguiente forma