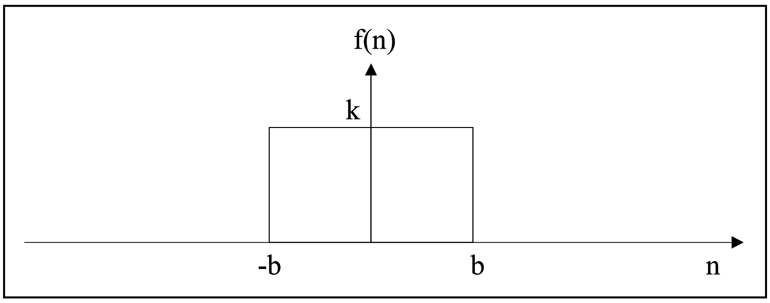
Problema PTC0004-35

Un transmisor codifica los bits en NRZ polar (+*A* voltios para el 1 y –*A* voltios para el cero). Dicha transmisión se ve afectada por un ruido aleatorio con función de densidad uniforme entre –*b* y +*b* voltios. El receptor codifica las tensiones inferiores a –*c* como un 1 y las superiores a +*c* como un cero. En la zona indeterminada del receptor la probabilidad de interpretación de un uno es lineal

a) Determinar analítica y gráficamente la probabilidad de que se produzca un error en un bit en función de la relación señal-ruido en el canal.
b) Repetir el cálculo anterior para el caso de la probabilidad de error de un carácter en una transmisión asíncrona con 8 bits de datos, un bit de parada y sin bit de paridad.

Solución PTC0004-35

Apartado a)
Sea *n(t)* la función temporal correspondiente al ruido aleatorio. Denominemos *f(n)* a la función de densidad de probabilidad de dicho ruido. Su representación gráfica es la siguiente



En toda función de densidad de probabilidad se verifica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = 1$$

por lo que, en nuestro caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = \int_{-b}^{b} kdn = k[n]_{-b}^{b} = k[b-(-b)] = 2kb = 1$$

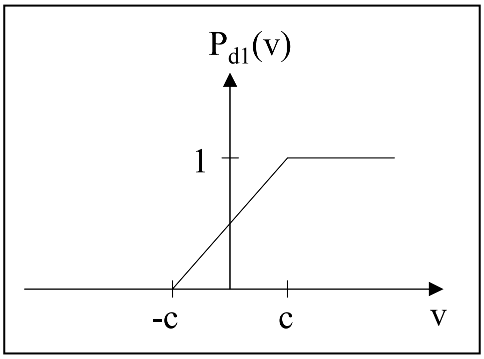
Esto nos conduce a que

$$k = \frac{1}{2b}$$

Por otra parte, la probabilidad de que el detector interprete un uno (*d=1*), en función del valor de la tensión a su entrada, lo denotamos como

$$P_{d1}(v) \equiv P[d = 1 \mid v_r = v]$$

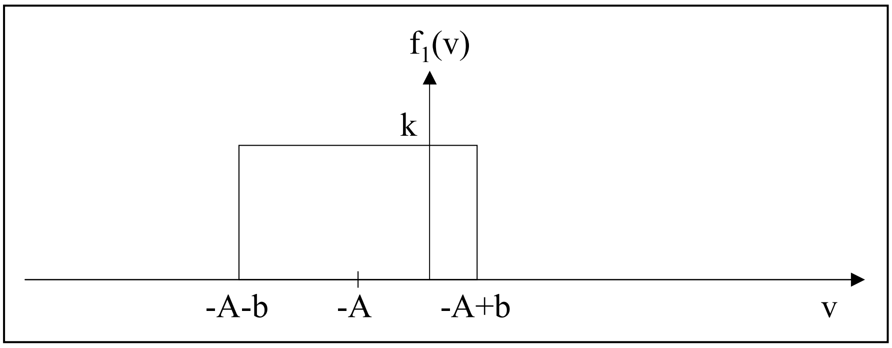
siendo su representación gráfica la siguiente.



Podemos ver fácilmente que el valor de dicha probabilidad vale

$$\begin{cases} P_{d1}(v) = 0 \quad \forall v \le -c \\ P_{d1}(v) = \dfrac{v}{2c} + \dfrac{1}{2} \quad \forall v \in [-c, c] \\ P_{d1}(v) = 1 \quad \forall v \ge c \end{cases}$$

Como el enunciado no afirma nada, supondremos que el ruido es aditivo. En ese caso, la función $f_1(v)$ de densidad de probabilidad de la tensión en el receptor cuando se transmite un 1 será como la de la figura



Esta función de densidad de probabilidad se corresponde, como sabemos, con la probabilidad de que la tensión del receptor esté en el entorno del valor *v* cuando se transmite un uno, o más concretamente

$$f_1(v) \equiv \frac{P_1[v \le v_r \le v + dv]}{dv}$$

La probabilidad de que el receptor cometa un error en la decisión cuando, habiendo transmitido un uno, la tensión del receptor esté en el entorno del valor *v*, la denotamos como

$$P_{e1}[v \le v_r \le v + dv]$$

Este valor se calcula como la probabilidad de que se produzcan simultáneamente dos sucesos:

- que la tensión del receptor esté en el entorno del valor *v*, y;
- que teniendo ese valor la tensión del receptor, se produzca un error de decisión.

Esta conjunción de sucesos (que suponemos independientes) se obtiene multiplicando la probabilidad de ambos sucesos por separado, es decir que

$$P_{e1}[v \le v_r \le v + dv] = P_1[v \le v_r \le v + dv] \cdot P[d = 1 \mid v_r = v]$$

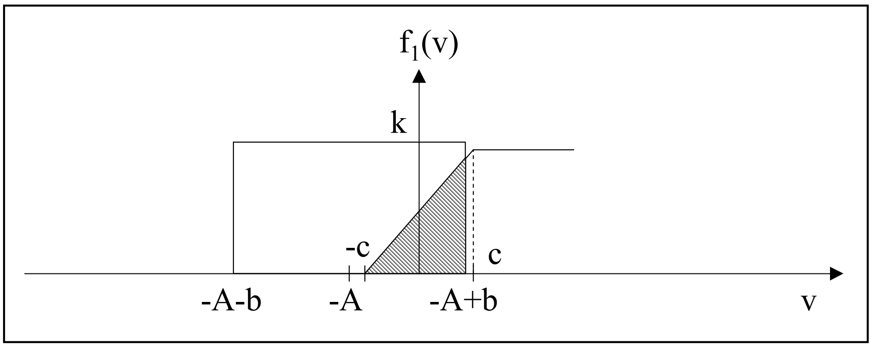
$$P_{e1}[v \le v_r \le v + dv] = \left[f_1(v)dv\right] \cdot P_{d1}(v)$$

$$P_{e1}[v \le v_r \le v + dv] = f_1(v) \cdot P_{d1}(v) \cdot dv$$

La probabilidad de error en el receptor cuando se transmite un uno será pues

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{e1}[v \le v_r \le v + dv] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v) \cdot P_{d1}(v) \cdot dv$$

lo que superponiendo las dos gráficas anteriores no da finalmente el área rayada



Este probabilidad vale

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v) \cdot P_{d1}(v) \cdot dv = \int_{-c}^{-A+b} f_1(v) \cdot P_{d1}(v) \cdot dv = \int_{-c}^{-A+b} k\left(\frac{v}{2c} + \frac{1}{2}\right)dv$$

$$P_{e1} = k\left[\frac{v^2}{4c} + \frac{v}{2}\right]_{-c}^{-A+b} = k\left[\frac{(-A+b)^2}{4c} + \frac{(-A+b)}{2} - \frac{(-c)^2}{4c} - \frac{-c}{2}\right]$$

$$P_{e1} = \frac{1}{2b}\left[\frac{A^2 + b^2 - 2Ab}{4c} + \frac{b-A}{2} - \frac{c}{4} + \frac{c}{2}\right] = \frac{1}{2b}\left[\frac{A^2 + b^2 - 2Ab}{4c} + \frac{b-A}{2} + \frac{c}{4}\right]$$

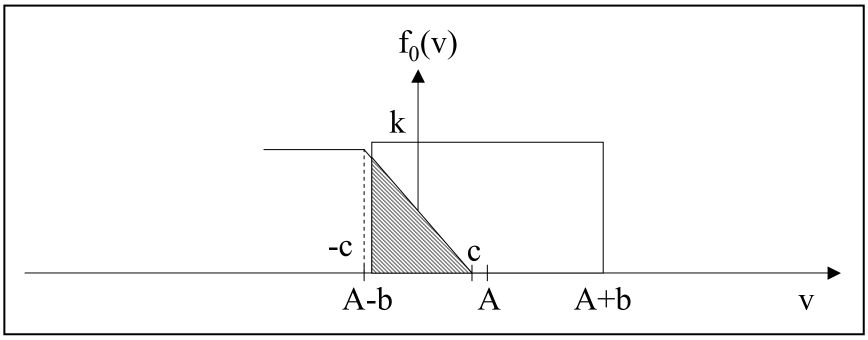
$$P_{e1} = \frac{1}{8bc}\left(A^2 + b^2 - 2Ab + 2bc - 2Ac + c^2\right)$$

$$P_{e1} = \frac{1}{8bc}\left[(A-b)^2 + c(c + 2b - 2A)\right]$$

El estudio análogo para la probabilidad de error en el receptor cuando se transmite un cero nos da

$$P_{e0} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{e0}[v \le v_r \le v + dv] = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) \cdot P_{d0}(v) \cdot dv$$

lo que se representa mediante el área rayada de la figura siguiente



lo que por simetría con el caso anterior nos da

$$P_{e0} = P_{e1} = \frac{1}{8bc}\left[(A-b)^2 + c(c+2b-2A)\right]$$

Si denominamos P_0 a la probabilidad de que se transmita un cero y P_1 a la de que se transmita un uno, la probabilidad de error será

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

Si en promedio se transmiten el mismo número de ceros que de unos tenemos que

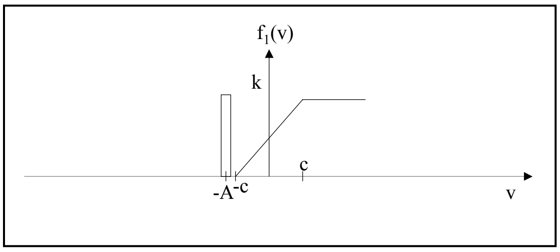
$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

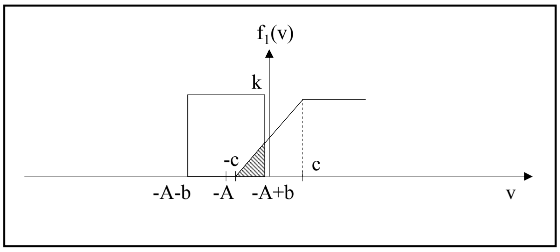
por lo que queda

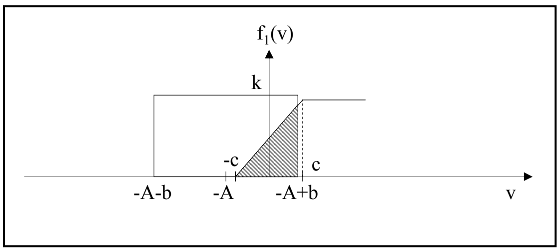
$$P_e = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} = \frac{1}{2}(P_{e0} + P_{e1}) = \frac{1}{2}(P_{e1} + P_{e1}) = P_{e1}$$

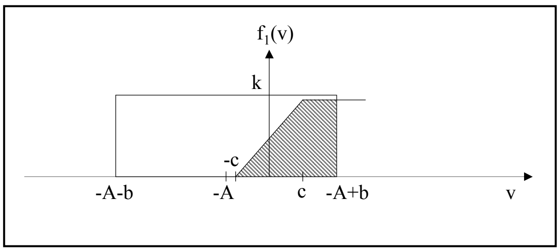
$$P_e = \frac{1}{8bc}\left[(A-b)^2 + c(c+2b-2A)\right]$$

Todo esto ocurre si $-c<-A+b<c$ (o lo que es lo mismo, $A-c<b<A+c$). Si consideramos A y c valores fijos y estudiamos cómo varía la probabilidad de error a medida que aumenta el ruido, tenemos las situaciones reflejadas en las figuras siguientes.









En estas figuras observamos tres casos:

a) El primero, en el que $b<A-c$ (primera figura) y por tanto vemos gráficamente que

$$P_e = 0$$

b) El segundo, en el que $A\text{-}c<b<A+c$ (segunda y tercera figuras), que se corresponde con el desarrollo anterior y en el que hemos demostrado que

$$P_e = \frac{1}{8bc}\left[(A-b)^2 + c(c+2b-2A)\right]$$

c) El tercero, en el que $b>A+c$ (cuarta figura), que no ha sido todavía estudiado y que debe ser desarrollado independientemente.

Analizando, por tanto, el tercero de los casos tenemos

$$P_e = P_{e1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)\cdot P_{d1}(v)\cdot dv = \int_{-c}^{c} f_1(v)\cdot P_{d1}(v)\cdot dv + \int_{c}^{-A+b} f_1(v)\cdot P_{d1}(v)\cdot dv$$

$$P_e = \int_{-c}^{c} k\left(\frac{v}{2c}+\frac{1}{2}\right)dv + \int_{c}^{-A+b} k\cdot 1\cdot dv = k\left[\frac{v^2}{4c}+\frac{v}{2}\right]_{-c}^{c} + k\left[v\right]_{c}^{-A+b}$$

$$P_e = k\left(\frac{c^2}{4c}+\frac{c}{2}-\frac{c^2}{4c}+\frac{c}{2}\right) + k(-A+b-c) = kc + k(-A+b-c)$$

$$P_e = k(c-A+b-c) = k(b-A)$$

$$P_e = \frac{1}{2b}(b-A)$$

Por otra parte para expresar ahora la probabilidad de error en función de la relación señal ruido (SNR) debemos transformar las expresiones anteriores. Supondremos que tanto A como c son valores prefijados por el sistema de comunicaciones que utilizamos. Por ello lo que puede alterar la probabilidad de error es la cantidad de ruido que se añade al sistema, es decir, el valor de b. En este sentido, sabemos que

$$SNR = \frac{S}{N}$$

Por una parte, la potencia de la señal S es fácil de calcular puesto que se trata de una señal digital de sólo dos valores ($+A$ y $-A$) y en ambos casos la potencia es la misma

$$S = A^2$$

Por otro lado, también sabemos que la potencia del ruido N es igual a la varianza (recordemos que el ruido es aleatorio), y que vale

$$N = \sigma^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} [n-\mu(n)]^2 f(n)dn$$

Teniendo en cuenta que la media del ruido vale

$$\mu(n) = \int_{-\infty}^{\infty} nf(n)dn = k\int_{-b}^{b} ndn = k\left[\frac{n^2}{2}\right]_{-b}^{b} = k\left[\frac{b^2}{2}-\frac{(-b)^2}{2}\right] = 0$$

podemos sustituir y obtener

$$N = \sigma^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} n^2 f(n) dn = k \int_{-b}^{b} n^2 dn = k\left[\frac{n^3}{3}\right]_{-b}^{b} = k\left[\frac{b^3}{3} - \frac{(-b)^3}{3}\right] = \frac{2}{3}kb^3$$

Recordando el valor de *k* podemos escribir finalmente

$$N = \sigma^2(n) = \frac{2}{3}\frac{1}{2b}b^3 = \frac{b^2}{3}$$

Sustituyendo los valores de *S* y *N* tenemos

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{A^2}{\frac{b^2}{3}} = \frac{3A^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{A^2} = \frac{3}{SNR}$$

$$b = A\sqrt{\frac{3}{SNR}}$$

Estamos ahora en condiciones de expresar la probabilidad de error en función de la SNR. En efecto, y resumiendo los tres casos analizados anteriormente tenemos:

a) Para *b<A-c*

$$b < A - c; \quad A\sqrt{\frac{3}{SNR}} < A - c; \quad \frac{3}{SNR} < \left(\frac{A-c}{A}\right)^2$$

$$SNR > 3\left(\frac{A}{A-c}\right)^2$$

En este caso

$$P_e = 0$$

b) Para *A-c<b<A+c*

$$A - c < b < A + c; \quad A - c < A\sqrt{\frac{3}{SNR}} < A + c$$

$$\left(\frac{A-c}{A}\right)^2 < \frac{3}{SNR} < \left(\frac{A+c}{A}\right)^2; \quad \left(\frac{A}{A-c}\right)^2 > \frac{SNR}{3} > \left(\frac{A}{A+c}\right)^2$$

$$3\left(\frac{A}{A-c}\right)^2 > SNR > 3\left(\frac{A}{A+c}\right)^2$$

En este caso

$$P_e = \frac{1}{8bc}\left[(A-b)^2 + c(c + 2b - 2A)\right]$$

$$P_e = \frac{1}{8cA\sqrt{\frac{3}{SNR}}}\left[\left(A - A\sqrt{\frac{3}{SNR}}\right)^2 + c\left(c + 2A\sqrt{\frac{3}{SNR}} - 2A\right)\right]$$

c) Para $b>A+c$

$$b > A + c; \quad A\sqrt{\frac{3}{SNR}} > A + c; \quad \frac{3}{SNR} > \left(\frac{A > c}{A}\right)^2$$

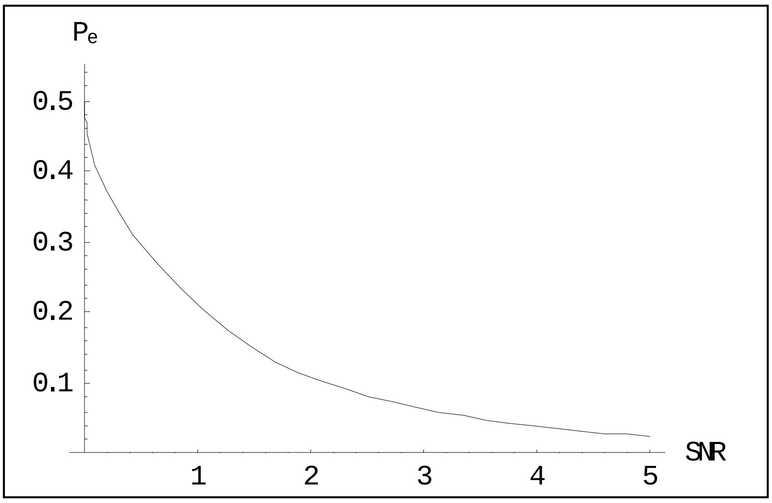
$$SNR < 3\left(\frac{A}{A+c}\right)^2$$

En este caso

$$P_e = \frac{1}{2A\sqrt{\frac{3}{SNR}}}\left(A\sqrt{\frac{3}{SNR}} - A\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{SNR}{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{SNR}} - 1\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{3}}\right)$$

Gráficamente dicha expresión toma la siguiente forma



Apartado b)

En el caso un carácter en una transmisión asíncrona con 8 bits de datos, un bit de parada y sin bit de paridad debemos darnos cuentas que el carácter está formado por $n=10$ bits (1 de comienzo, 8 de datos y 1 de parada). La probabilidad de que se produzca un error en un carácter es la complementaria de que llegue un carácter correcto.

$$P_{ec} = 1 - \overline{P_{ec}}$$

La probabilidad de que llegue un carácter correcto es igual a la probabilidad de que lleguen correctos todos y cada uno de los *n* bits del carácter.

$$\overline{P_{ec}} = \overline{P_e} \cdot \overline{P_e} \cdot \overline{P_e} \cdots \overline{P_e} = \overline{P_e}^{\,n}$$

siendo la probabilidad de que llegue correcto un bit la complementaria de que llegue erróneo dicho bit

$$\overline{P_e} = 1 - P_e$$

Por tanto, sustituyendo,

$$P_{ec} = 1 - \left(1 - P_e\right)^n$$

Gráficamente dicha expresión toma la siguiente forma