TEORÍA TTC-002: RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL TELEGRAFISTA

En este documento se resuelve de forma más rigurosa la llamada ecuación del telegrafista, en su expresión en tensión, que puede formularse, según vimos, de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t^2} \qquad [1]$$

que, se puede expresar también como

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t^2} \qquad [2]$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, por lo que debemos recordar algunas cuestiones sobre dichas ecuaciones, antes de abordar la resolución de la que específicamente nos interesa. Sabemos que la solución de una ecuación diferencial ordinaria de las variables x e y (no en derivadas parciales), se puede expresar mediante

$$f(x,y,K) = 0 \qquad [3]$$

donde K es una constante de integración arbitraria a determinar mediante las condiciones de contorno. Esta solución puede interpretarse como una familia de curvas en el plano (x,y) de parámetro K. Análogamente, la solución de una ecuación en derivadas parciales de las variables x, y, z se puede expresar mediante

$$F[f(x,y,z), g(x,y,z)] = 0 \qquad [4]$$

donde f y g son funciones concretas y F es una función cualquiera, que realiza las veces de la constante de integración K, y que se determina mediante las condiciones de contorno del problema. La solución de la ecuación puede interpretarse como una familia de superficies en el espacio (x,y,z).

Obviamente, no existe una forma general de resolución de ecuaciones en derivadas parciales, por lo que habrá que proceder en cada caso según el tipo de ecuación de que se trate. Para comenzar vamos a fijarnos en las denominadas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden homogéneas, que son ecuaciones que responden al siguiente esquema

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad [5]$$

Para resolver esta ecuación se plantea en primer lugar la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \qquad [6]$$

y se obtiene su solución en la forma

$$\varphi(x,y,K) = 0 \qquad [7]$$

expresión en la que se despeja la constante de integración K en la forma

$$K = f(x,y) \qquad [8]$$

Pues bien, puede demostrarse que la solución a la ecuación [5] se expresa como

$$z = F[f(x, y)] \qquad [9]$$

donde *F* es una función cualquiera.

Con estos conocimientos, volvamos de nuevo nuestra atención a la ecuación del telegrafista según se expresa en [2], que puede reescribirse como

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t^2} = 0 \qquad [10]$$

Nuestro objetivo será convertirla en ecuaciones de primer orden homogéneas, de las que sí sabemos cómo resolver. Pues bien, la ecuación bajo estudio admite dos descomposiciones en ecuaciones de primer orden que vamos a detallar. Si recordamos que

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t \partial z} \qquad [11]$$

podemos escribir, en primer lugar,

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z^2} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z \partial t} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t \partial z} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t^2} = 0 \qquad [12]$$

y también,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}\right] - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}\right] = 0 \qquad [13]$$

ecuación que obviamente se satisface para

$$\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t} = 0 \qquad [14]$$

y cuya solución será también una solución de [10]. La otra solución se obtiene de la segunda posible descomposición de la ecuación de segundo orden en otras de primer orden. En efecto, siguiendo un razonamiento análogo al anterior, la ecuación [10] se puede escribir también como

$$\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z^2} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial z \partial t} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t \partial z} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V(t,z)}{\partial t^2} = 0 \qquad [15]$$

y también,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}\right] + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t}\right] = 0 \qquad [16]$$

ecuación que obviamente se satisface para

$$\frac{\partial V(t,z)}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial V(t,z)}{\partial t} = 0 \qquad [17]$$

y cuya solución será también una solución de [10]. Calculemos pues las soluciones de las dos ecuaciones de primer orden obtenidas.

Cómo podemos observar estas ecuaciones son ecuaciones en derivadas parciales de primer orden homogéneas, de la misma forma expresada en [5], por lo que habrá que proceder como allí se indicó. Planteemos pues, en primer lugar, la ecuación diferencial ordinaria correspondiente a la ecuación [14] que, haciendo la asignación de variables

$$V = z; \quad t = y; \quad z = x; \qquad [18]$$

y recordando [6], nos conduce a

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\frac{1}{v}}{1} = \frac{1}{v} \qquad [19]$$

que se resuelve como

$$t = \frac{1}{v} z + K \qquad [20]$$

de donde

$$K = t - \frac{z}{v} \qquad [21]$$

y por tanto la solución de la ecuación [14] se plantea como

$$V(t,z) = F_1\left[t - \frac{z}{v}\right] \qquad [22]$$

Procediendo de forma análoga con la ecuación [17] se plantea su ecuación diferencial ordinaria correspondiente como

$$\frac{dt}{dz} = \frac{-\frac{1}{v}}{1} = -\frac{1}{v} \qquad [23]$$

que se resuelve como

$$t = -\frac{1}{v} z + K \qquad [24]$$

de donde

$$K = t + \frac{z}{v} \qquad [25]$$

y por tanto la solución de la ecuación [14] se plantea como

$$V(t,z) = F_2\left[t + \frac{z}{v}\right] \qquad [26]$$

Con todo esto hemos calculado las dos soluciones generales posibles de la ecuación del telegrafista, las que teniendo en cuenta la linealidad de dicha ecuación, pueden simplificarse en una única solución general que sea combinación lineal de las dos anteriores. Por tanto, dicha solución general de la ecuación del telegrafista, según los términos planteados en [10], puede expresarse como

$$V(t,z) = F_1\left[t - \frac{z}{v}\right] + F_2\left[t + \frac{z}{v}\right] \qquad [27]$$

ANEXO 2.- ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LA IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA.

El objetivo de este anexo es mostrar que la impedancia característica de un cable tiene, efectivamente, unidades de ohmios, y que la velocidad de propagación las tiene de metros/segundo. Utilizaremos para este análisis, como unidades básicas, las de longitud (metro), tiempo (segundo), masa (kilogramo) y carga eléctrica (culombio). En lo que sigue, los corchetes indican "dimensiones de" aquello que encierran. Comencemos por recordar las dimensiones de la intensidad eléctrica

$$[I] = \left[\frac{dq}{dt}\right] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{cul}{seg} \qquad [28]$$

de la energía

$$[E] = [F\ d] = [m][a][d] = Kg\frac{m}{sg^2}m = Kg\frac{m^2}{sg^2} \qquad [29]$$

y de la tensión eléctrica

$$[V] = \left[\frac{E}{q}\right] = \frac{[E]}{[q]} = \frac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2} \qquad [30]$$

Las dimensiones de una resistencia (o impedancia) son

$$[R] = Ohm = \frac{[V]}{[I]} = \frac{\dfrac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2}}{\dfrac{cul}{sg}} = \frac{Kg\ m^2}{cul^2\ sg} \qquad [31]$$

Veamos ahora las dimensiones de la capacidad eléctrica. Recordemos para ello que la intensidad en un condensador es

$$I = C\frac{dV}{dt} \qquad [32]$$

de donde

$$[C] = \frac{[I]\ [dt]}{[dV]} = \frac{\dfrac{cul}{sg}sg}{\dfrac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2}} = \frac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^2} \qquad [33]$$

y, por tanto, las dimensiones de la capacidad unitaria serán

$$[\,C_u] = \frac{[C]}{[d]} = \frac{\dfrac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^2}}{m} = \frac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^3} \qquad [34]$$

Análogamente, las dimensiones de la inductancia pueden calcularse recordando que la tensión eléctrica en una bobina es

$$V = L\frac{dI}{dt} \qquad [35]$$

de donde

$$[L] = \frac{[V][dt]}{[dI]} = \frac{\frac{Kg\,m^2}{cul\,sg^2}sg}{\frac{cul}{sg}} = \frac{Kg^2\,m^2}{cul^2} \qquad [36]$$

e, igualmente, las dimensiones de la inductancia unitaria serán

$$[\,L_u] = \frac{[L]}{[d]} = \frac{\frac{Kg^2\,m^2}{cul^2}}{m} = \frac{Kg^2\,m}{cul^2} \qquad [37]$$

Con estos datos estamos ya en condiciones de calcular las dimensiones de la velocidad de propagación de la señal en el cable, según

$$[v] = \left[\frac{1}{\sqrt{L_u\,C_u}}\right] = \frac{1}{\sqrt{[\,L_U]\,[\,C_u]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Kg\,m}{cul^2}\,\frac{cul^2\,sg^2}{Kg\,m^3}}} = \frac{m}{sg} \qquad [38]$$

Igualmente, podemos determinar las dimensiones de la impedancia característica del cable, según la expresión

$$[\,Z_0] = \left[\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}\right] = \sqrt{\frac{[\,L_u]}{[\,C_u]}} = \sqrt{\frac{\frac{Kg\,m}{cul^2}}{\frac{cul^2\,sg^2}{Kg\,m^3}}} = \frac{Kg\,m^2}{cul^2\,sg} = Ohm \qquad [39]$$

Vemos pues que, como se quería demostrar, la velocidad de propagación tiene dimensiones de velocidad, y la impedancia característica tiene dimensiones de impedancia.