TEORÍA TTC-003: ANÁLISIS DIMENSIONAL DE VARIABLES EN TRANSMISIÓN DE DATOS POR CABLE

El objetivo de este documento es mostrar que la impedancia característica de un cable tiene, efectivamente, unidades de ohmios, y que la velocidad de propagación las tiene de metros/segundo. Utilizaremos para este análisis, como unidades básicas, las de longitud (metro), tiempo (segundo), masa (kilogramo) y carga eléctrica (culombio). En lo que sigue, los corchetes indican "dimensiones de" aquello que encierran. Comencemos por recordar las dimensiones de la intensidad eléctrica

$$[I] = \left[\frac{dq}{dt}\right] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{cul}{seg} \qquad [1]$$

de la energía

$$[E] = [F\ d] = [m][a][d] = Kg\frac{m}{sg^2}m = Kg\frac{m^2}{sg^2} \qquad [2]$$

y de la tensión eléctrica

$$[V] = \left[\frac{E}{q}\right] = \frac{[E]}{[q]} = \frac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2} \qquad [3]$$

Las dimensiones de una resistencia (o impedancia) son

$$[R] = Ohm = \frac{[V]}{[I]} = \frac{\frac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2}}{\frac{cul}{sg}} = \frac{Kg\ m^2}{cul^2\ sg} \qquad [4]$$

Veamos ahora las dimensiones de la capacidad eléctrica. Recordemos para ello que la intensidad en un condensador es

$$I = C\frac{dV}{dt} \qquad [5]$$

de donde

$$[C] = \frac{[I]\ [dt]}{[dV]} = \frac{\frac{cul}{sg}sg}{\frac{Kg\ m^2}{cul\ sg^2}} = \frac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^2} \qquad [6]$$

y, por tanto, las dimensiones de la capacidad unitaria serán

$$[C_u] = \frac{[C]}{[d]} = \frac{\frac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^2}}{m} = \frac{cul^2\ sg^2}{Kg\ m^3} \qquad [7]$$

Análogamente, las dimensiones de la inductancia pueden calcularse recordando que la tensión eléctrica en una bobina es

$$V = L\frac{dI}{dt} \qquad [8]$$

de donde

$$[L] = \frac{[V][dt]}{[dI]} = \frac{\frac{Kg\, m^2}{cul\, sg^2}sg}{\frac{cul}{sg}} = \frac{Kg^2\, m^2}{cul^2} \qquad [9]$$

e, igualmente, las dimensiones de la inductancia unitaria serán

$$[\,L_u] = \frac{[L]}{[d]} = \frac{\frac{Kg^2\, m^2}{cul^2}}{m} = \frac{Kg^2\, m}{cul^2} \qquad [10]$$

Con estos datos estamos ya en condiciones de calcular las dimensiones de la velocidad de propagación de la señal en el cable, según

$$[v] = \left[\frac{1}{\sqrt{L_u\, C_u}}\right] = \frac{1}{\sqrt{[\,L_U]\,[\,C_u]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Kg\, m}{cul^2}\,\frac{cul^2\, sg^2}{Kg\, m^3}}} = \frac{m}{sg} \qquad [11]$$

Igualmente, podemos determinar las dimensiones de la impedancia característica del cable, según la expresión

$$[\,Z_0] = \left[\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}\right] = \sqrt{\frac{[\,L_u]}{[\,C_u]}} = \sqrt{\frac{\frac{Kg\, m}{cul^2}}{\frac{cul^2\, sg^2}{Kg\, m^3}}} = \frac{Kg\, m^2}{cul^2\, sg} = Ohm \qquad [12]$$

Vemos pues que, como se quería demostrar, la velocidad de propagación tiene dimensiones de velocidad, y la impedancia característica tiene dimensiones de impedancia.