Tecnología de las Comunicaciones

Tema 3. El dominio de la frecuencia. Aspectos teórico-prácticos para la construcción de un cañón de energía bioetérea

Francisco Sivianes Castillo

Departamento de Tecnología Electrónica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad de Sevilla

Octubre, 2011

Índice

Desarrollo en serie de Fourier

Utilizados para el estudio espectral de funciones periodicas y “normalitas“

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \tag{1}$$

en donde

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T};\; f = \frac{1}{T};\; \omega = 2\pi f \tag{2}$$

Siendo T el periodo de la función $f(t)$ y f su frecuencia.

Desarrollo en serie de Fourier

Si $T = 1ms \Longrightarrow$ para $n = 1 \Longrightarrow \omega_1 = 2\pi 10^3 rad/seg$ y $f_1 = 10^3 Hz = 1KHz$.

Esta es la denominada frecuencia fundamental, que es aquella frecuencia que se obtiene para $n = 1$ (algunas veces aparece como ω_0 y como f_0).

Por tanto una señal periódica de $f = 1KHz$ siempre se puede obtener como suma de funciones senos y cosenos de frecuencia $f = 1KHz$, $f = 2KHz$, $f = 3KHz$ ...

A cada uno de los sumandos se les llama armónico. A medida que n aumenta, la contribución de dicho término a la suma disminuye.

Segunda forma

La misma formulación que vimos anteriormente se puede expresar en la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_n t + b_n \operatorname{sen}\omega_n t) \tag{3}$$

donde ahora las constante a_0, a_n y b_n viene dadas por:

$$a_0 = TA_0;\; a_n = \frac{TA_n}{2};\; b_n = \frac{TB_n}{2} \tag{4}$$

Motivo para esta segunda forma

Obtener expresiones de a_0, a_n y b_n más sencillas.

Para a_0

$$a_0 = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad (5)$$

Para a_n y b_n

$$a_n = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_n t dt \qquad (6)$$

$$b_n = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} \omega_n t dt \qquad (7)$$

Objetivo

Para desarrollar una función $f(t)$ periódica, habría que calcular a_0, a_1, a_2, ... y b_1, b_2, b_3.

Tercera forma

La misma formulación que vimos anteriormente en (3) y en (5) se puede expresar en otra forma

$$f(t) = \frac{K_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right)\right] \tag{8}$$

donde ahora se debe cumplir que:

$$K_0 = a_0;\ K_n = \sqrt[2]{{a_n}^2 + {b_n}^2};\ \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{9}$$

Representación de K_n y φ_n

Conocidos los valores de a_0, a_n y b_n, podemos obtener los correspondientes de K_0, K_n y φ_n. Con estos valores podemos hacer una representación de estos frente a n (y por tanto frente a w_n y f_n.

Espectro de amplitud y fase

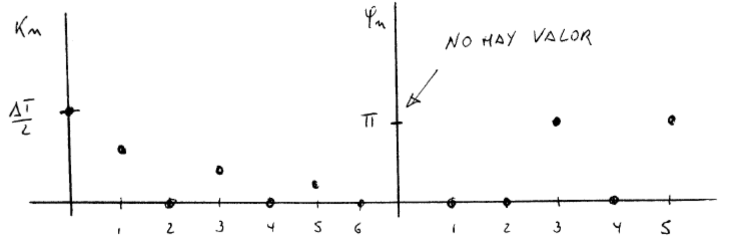


Figura: Espectro de amplitud y fase

Calcular los espectro de amplitud y fase

Calcular los espectros de amplitud y fase, es decir representar esa realidad en el dominio de la frecuencia.

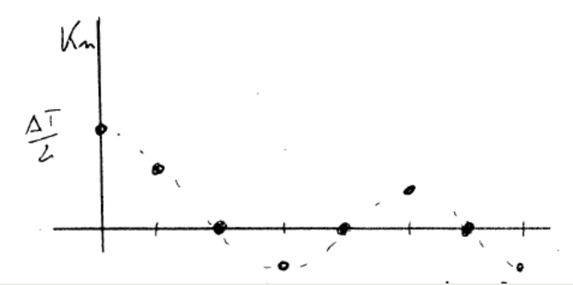


Figura: Señal periódica

Calcular los espectro de amplitud y fase

$$f(t) = \frac{K_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right)\right] \tag{10}$$

donde ahora se debe cumplir que:

$$K_0 = a_0;\ K_n = \sqrt[2]{{a_n}^2 + {b_n}^2};\ \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{11}$$

Calculamos:

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{-T/4}^{T/4} Adt = At]_{-T/4}^{T/4} = A[\frac{T}{4} - (-\frac{T}{4})] = \frac{AT}{2} \tag{12}$$

Calcular los espectro de amplitud y fase

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(nw_f t) dt = \int_{-T/4}^{T/4} Acos(nw_f t) dt = \quad (13)$$

$$= \frac{A}{nw_f}[sen(nw_f t)]_{-T/4}^{T/4} = \frac{A}{nw_f}[sen(nw_f \frac{T}{4}) - sen(nw_f(-\frac{T}{4}))] \quad (14)$$

Teniendo en cuenta:

$$w_f = \frac{2\pi}{T} \quad (15)$$

$$a_n = \frac{A}{n\frac{2\pi}{T}}[sen(n\frac{\pi}{2} + sen(n\frac{\pi}{2}] = \frac{AT}{n\pi} sen(n\frac{n\pi}{2}) \quad (16)$$

Calcular los espectro de amplitud y fase

De forma análoga para b_n

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(nw_f t)dt = \int_{-T/4}^{T/4} Asen(nw_f t)dt = \quad (17)$$

$$= \frac{A}{nw_f}[-cos(nw_f t)]_{-T/4}^{T/4} = \frac{A}{nw_f}[-cos(nw_f \frac{T}{4}) + cos(nw_f(-\frac{T}{4}))] \quad (18)$$

Teniendo en cuenta:

$$w_f = \frac{2\pi}{T} \quad (19)$$

$$b_n = \frac{A}{n\frac{2\pi}{T}}[cos(n\frac{\pi}{2} - cos(n\frac{\pi}{2}] = 0 \quad (20)$$

Calcular los espectro de amplitud y fase

Con estos valores calculamos K_0 y k_n

$$K_0 = a_0 = \frac{AT}{2} \tag{21}$$

$$K_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n \tag{22}$$

Ya que $b_n = 0$

Por otra parte:

$$\varphi_n = arctg(\frac{-b_n}{a_n}) = arctg\ 0 \Rightarrow \varphi_n = 0 \tag{23}$$

Ahora tenemos toda la información

Espectro de amplitud

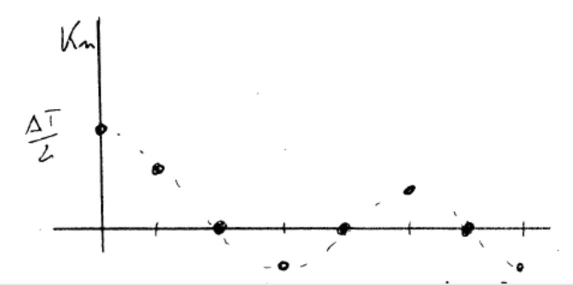


Figura: Espectro de amplitud

Espectro de fase

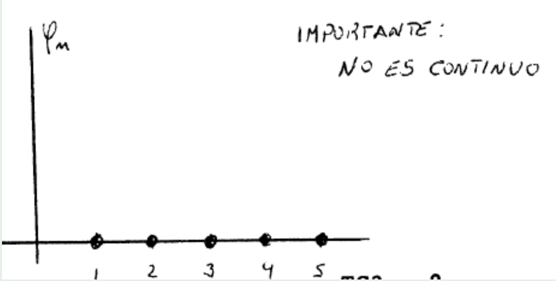


Figura: Espectro de fase

Calcular los espectro de amplitud y fase

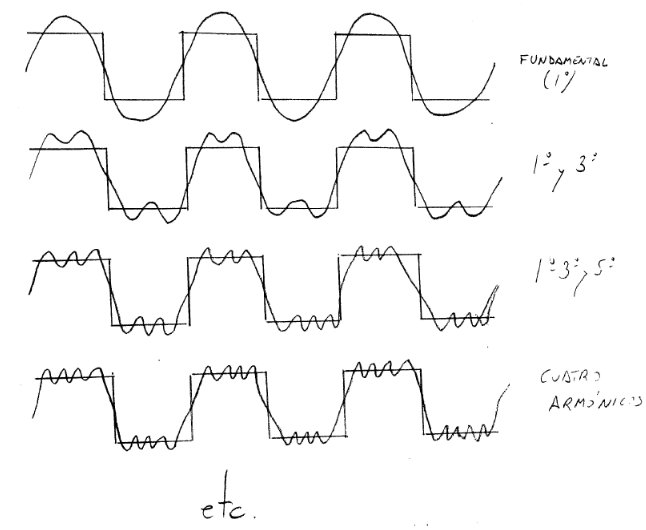
Los k_n tienen los siguientes posibles valores:

$$k_n = a_n = \frac{AT}{n\pi} sen(n\frac{\pi}{2}) \quad (24)$$

$$(25)$$

Para n par, el $sen(x)$ es multiplo de π; y por tanto la expresión vale 0.
Para n impar:
Si n $=$ 1,5,9,13 el $sen(x)$ es positivo multiplo de $\frac{\pi}{2}$; y por tanto la expresión vale $\frac{AT}{n\pi}$
Si n $=$ 3,7,11 el $sen(x)$ es negativo multiplo de $\frac{3\pi}{2}$; y por tanto la expresión vale $\frac{-AT}{n\pi}$

Efecto del número de armonicos



Modificación del ancho del pulso

Repetir el ejercicio para un ancho de pulso d, que no tiene por qué coincidir con $T/2$

Representación grafica de K_n y φ_n

Conocidos los valores de a_0, a_n y b_n podemos obtener los correspondientes de K_0, K_n y φ_n. Con estos valores podemos hacer una representación gráfica de K_n y φ_n frente a n (y por tanto frente a ω_n y a f_n). Estas representaciones gráficas se conocen como espectro de amplitud (para K_n) y espectro de fase (para φ_n).

Vamos en busca de la cuerta forma

Los desarrollo en serie vistos hasta ahora no son muy utilizados. Por ello, vamos a ver una cuarta forma de obtener ese desarrollo, que va a resultar más potente, desde el punto de vista matemático, que las anteriores.

Un momento

Antes de comenzar es conveniente recordar algunas expresiones del cálculo con números complejos.

$$j = \sqrt[2]{-1} \; ; \; \frac{1}{j} = -j \tag{26}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x \; ; \; e^{-jx} = \cos x - j \operatorname{sen} x \tag{27}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \; ; \; \operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{28}$$

Comenzamos

Ahora estamos en condiciones de empezar. Si partimos de la ecuación (3) y sustituimos las expresiones anteriores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Con lo que la expresión final será:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \tag{29}$$

Podemos observar que el coeficiente c_n es complejo y lo podemos expresar en función de su módulo y su argumento:

$$c_n = |c_n| e^{j arg[c_n]} \tag{30}$$

$$c_n = a_n - jb_n \Longrightarrow |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = k_n \tag{31}$$

$$arg[c_n] = \arctan(-\frac{b_n}{a_n}) = \varphi_n \tag{32}$$

Por tanto se puede realizar una representación gráfica del módulo de c_n, igual que se hacía con k_n y se tendría también un espectro de amplitud. De la misma manera podemos obtener una representación gráfica del argumento de c_n, igual que se hacía con φ_n y se tendría el espectro de fase.

La función Sample

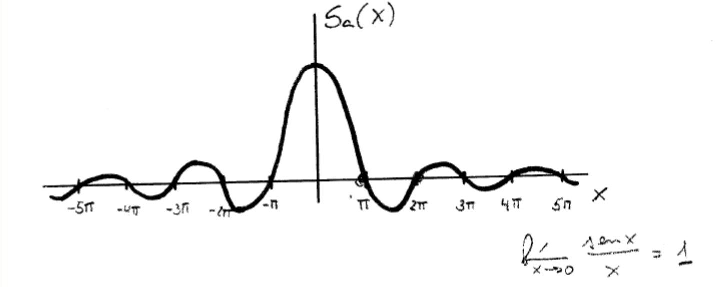


Figura: Función Sample

Espectro de amplitud

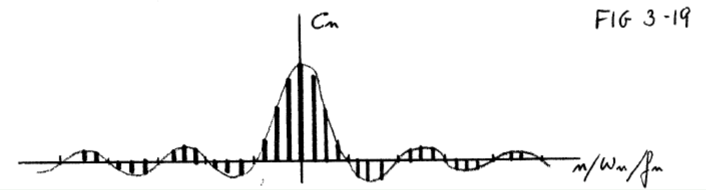


Figura: Espectro de amplitud

Espectro de fase

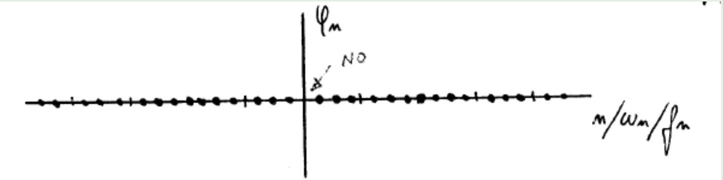


Figura: Espectro de fase

Espectro de amplitud

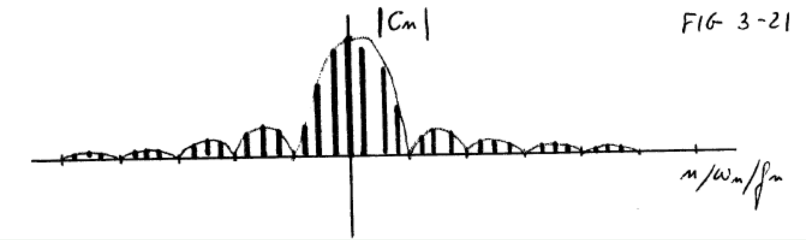


Figura: Espectro de amplitud

Espectro de fase

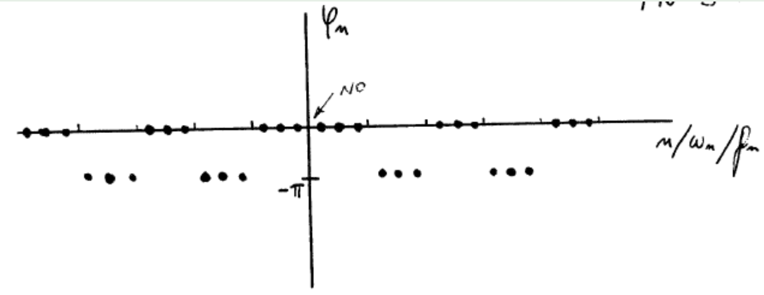


Figura: Espectro de fase

Modificación del ancho del pulso

1. Particularizar para un ancho de pulso $d = T/2$
2. Comparar el resultado con el ejercicio realizado anteriormente, para la tercera forma.

Recuerda que el resultado final del ejercicio de la tercera forma es:

$$f(t) = \frac{A}{2} + 2\frac{A}{\pi}[\cos\omega_f t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_f t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_f t - \frac{1}{7}\cos 7\omega_f t + \ldots \tag{33}$$

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

Podemos observar que el primer paso por cero ocurrre cuando $x = \pi$. El segundo paso por cero en $x = 2\pi$, el tercero en $x = 3\pi$...

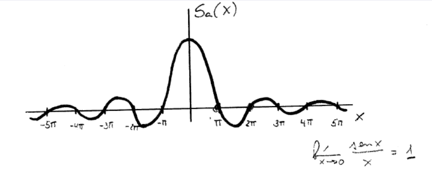


Figura: Función Sample

Por tanto podemos decir que:

$$\frac{\omega_c d}{2} = \pi \tag{34}$$

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

Por tanto ω_c tendrá la expresión:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{d} \tag{35}$$

Y para el caso concreto de que $d = T/2$:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{\frac{T}{2}} = \frac{4\pi}{T} \tag{36}$$

El segundo cruce por cero ocurrirá en $2\omega_c = 8\pi/T$, el tercero en $3\omega_c = 16\pi/T$, y así sucesivamente.

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

1. Si el periodo T disminuye, f aumenta y el espectro se hace más grande, ya que el primer paso por cero se produce a frecuencias mayores.
2. Si el periodo T aumenta, f disminuye y el espectro se hace más pequeño, ya que el primer paso por cero se produce a frecuencias menores.
3. Otro aspecto importante es saber cuantos términos de la función SAMPLE(x) son significativos.

Al ancho en frecuencia, del conjunto de frecuencias significativas, de una señal determinada se denomina ANCHO DE BANDA de la señal.

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

1. Si el periodo T disminuye, el ancho de banda aumenta.
2. Si el periodo T aumenta, el ancho de banda disminuye.

Y además:

1. Si el ancho de banda es grande, la señal posee frecuencias altas, la señal varía muy rápido.
2. Si el ancho de banda es pequeño, la señal posee frecuencias bajas, la señal varía lentamente.

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

También es interesante estudiar la separación entre dos líneas consecutivas. Esta separación viene dada por:

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi(n)}{T} = \frac{2\pi}{T} \tag{37}$$

1. Como se aprecia la separación entre líneas espectrales no depende de n.Por tanto están todas separadas a una misma distacia $\frac{2\pi}{T}$.
2. Si T aumenta, la separción de las rayas espectrales disminuye.
3. Si T disminuye, la separación entre rayas esprectales aumenta.

Algunos detalles de la función SAMPLE(x)

$Sa(x) = sen(x)/x$

Vamos a sacar información de la función SAMPLE(x)

Ahora vamos a dejar fijo T y variamos d:

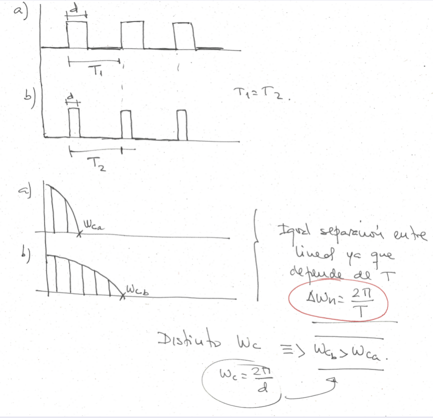


Figura: Función Sample