Circuitos Electrónicos Digitales

Tema II – Parte II

Álgebra de Conmutación

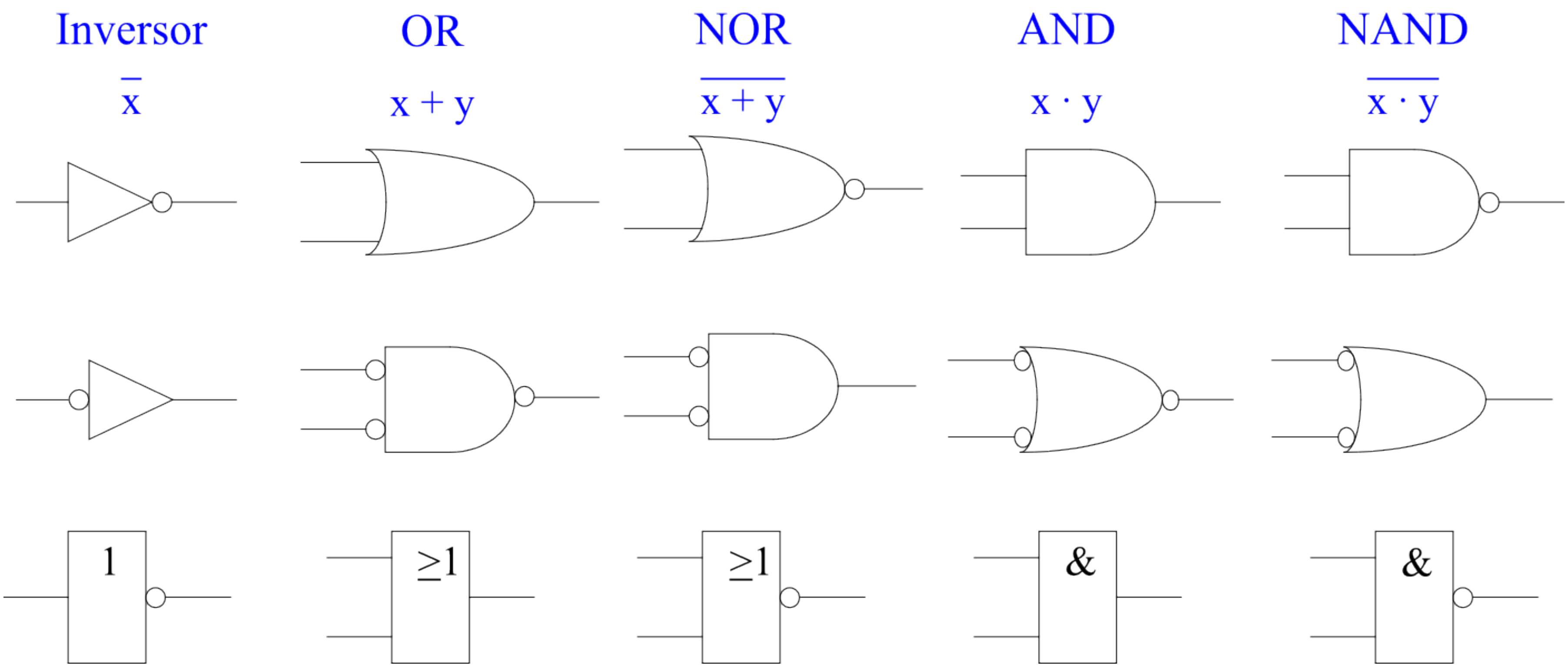
Índice

Álgebra de Conmutación

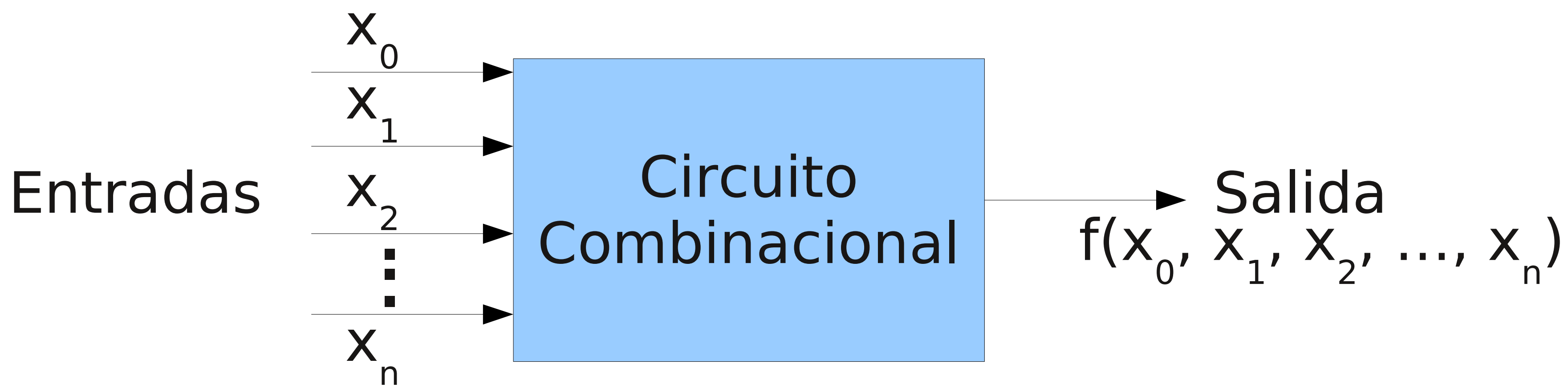
Postulado/Teorema	<**B, +, •,** ‾ > ; B = {..., 0, 1}; + es OR; • es AND; ‾ es NOT	
P1 Ley de identidad	$x + 0 = x$	$x \bullet 1 = x$
P2 Ley conmutativa	$x + y = y + x$	$x \bullet y = y \bullet x$
P3 Ley distributiva	$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$	$x + (y \bullet z) = (x + y) \bullet (x + z)$
P4 Ley del complemento: ∀x existe $\overline{x}$ tal que	$x + \overline{x} = 1$	$x \bullet \overline{x} = 0$
T1 Ley de idempotencia	$x + x = x$	$x \bullet x = x$
T2 Ley de unicidad del complemento	$\overline{x}$ es único	
T3 Ley de los elementos dominantes	$x + 1 = 1$	$x \bullet 0 = 0$
T4 Ley involutiva	$(\overline{x}) = x$	
T5 Ley de absorción	$x + x \bullet y = x$	$x \bullet (x + y) = x$
T6 Ley del consenso	$x + \overline{x} \bullet y = x + y$	$x \bullet (\overline{x} + y) = x \bullet y$
T7 Ley asociativa	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
T8 Ley de De Morgan	$\overline{x \bullet y} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x + y} = \overline{x} \bullet \overline{y}$
T9 Ley de De Morgan generalizada	$\overline{x \bullet y \bullet z \ldots} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \ldots$	$\overline{x + y + z + \ldots} = \overline{x} \bullet \overline{y} \bullet \overline{z} \ldots$
T10 Ley del consenso generalizado	$x \bullet y + \overline{x} \bullet z + y \bullet z = x \bullet y + \overline{x} \bullet z$	$(x + y) \bullet (\overline{x} + z) \bullet (y + z) = (x + y) \bullet (\overline{x} + z)$

Álgebra de Conmutación

Operadores básicos → Puertas lógicas



Funciones Combinacionales



Representación matemática:

Funciones de conmutación o combinacionales

Funciones Combinacionales

- Definición: Una función de conmutación es una aplicación f: $B_n \rightarrow B$. $f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- x_i son variables binarias.
- Una función de conmutación es completamente especificada cuando asigna un valor (0 o 1) a todos los posibles valores de sus variables.
- En otro caso, la función es incompletamente especificada.

Funciones Combinacionales

Existen varias formas de representar una función de conmutación:

- Expresión
- Tabla de verdad
- Mapa
- Circuito
- Código HDL

Funciones Combinacionales

Expresión: $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

Tabla de verdad

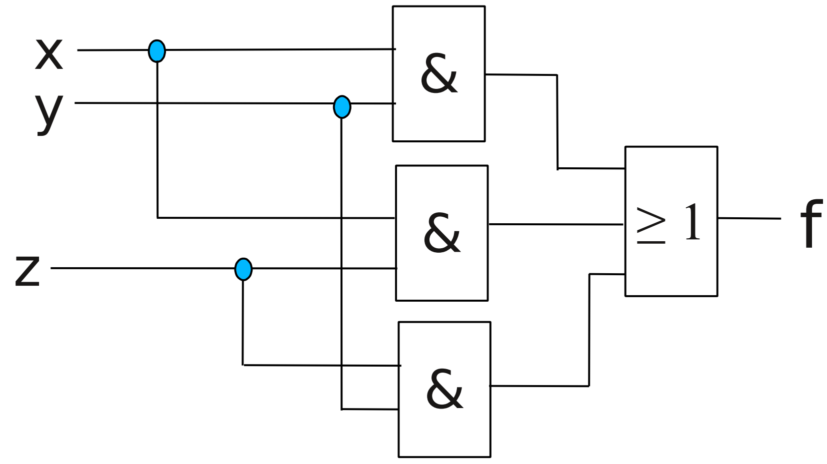
xyz	f(x,y,z)
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

Mapa

z \ x y	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

f

Circuito



Código Verilog

```
module ejemplo(
   output reg f,
   input wire x,
   input wire y,
   input wire z,
   );

   always @(x, y, z)
    f = x & y | x & z | y & z
endmodule
```

Funciones Combinacionales: Formas normalizadas

- Las formas normalizadas son la suma de productos y el producto de sumas.
- Los términos producto siempre determinan los unos de la función y los términos suma los ceros.

  Elemento dominante:

  - Respecto a operador + $\rightarrow$ 1 $(1+x=1)$
  - Respecto a operador · $\rightarrow$ 0 $(0 \cdot x=0)$

- Ejemplos:
  - $f = xy + \overline{y} + yz$ Suma de productos
  - $g = x\,(y+z)$ Producto de sumas
  - $h = \overline{(abc+\overline{b}ad+\overline{(a+b+c)}+de)}$ No normalizado

Funciones Combinacionales: Forma canónica disyuntiva

- Es una suma de productos compuesta sólo de mintérminos.
- Mintérmino: término producto en el que aparecen todas las variables de la función, complementada o sin complementar, una única vez.
- Existen 2^n mintérminos de n variables.
- Ejemplo: para 3 variables hay 8 mintérminos que son:

$$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z},\ \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z,\ \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z},\ \overline{x}\cdot y\cdot z,\ x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z},\ x\cdot\overline{y}\cdot z,\ x\cdot y\cdot\overline{z},\ x\cdot y\cdot z$$

Funciones Combinacionales: Forma canónica disyuntiva

- Teorema: Dada una lista completa de los mintérminos de n variables, si a cada una de las n variables se le asigna el valor 0 o 1, entonces sólo un mintérmino de la lista tomará el valor 1 y los otros el valor 0.

Ejemplo:

Para x,y,z=110, sólo el mintérmino $x \cdot y \cdot \overline{z}$ toma valor 1, el resto toma el valor 0.

Funciones Combinacionales: Forma canónica disyuntiva

- Teorema: Cada función de conmutación completamente especificada puede expresarse en forma canónica de mintérminos.
- Teorema: La forma canónica de mintérminos de una función de conmutación completa es única.

Ejemplo

$$g(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}+\bar{x}\,y\,\bar{z}+xyz$$

$$\begin{aligned} g(x,y,z)=1 \Leftrightarrow \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}&=1\rightarrow x=0,y=0,z=0\\ \bar{x}\,y\,\bar{z}&=1\rightarrow x=0,y=1,z=0\\ x\,y\,z&=1\rightarrow x=1,y=1,z=1 \end{aligned}$$

Funciones Combinacionales: Forma canónica disyuntiva

Notación m: Cada mintérmino se representa de la forma "m_X" donde "X" es un número asociado a cada mintérmino de forma que:

1. Se establece un orden entre las variables. Ej. (x_1, x_2, x_3)
2. Se asocia un 0 a cada variable complementada
3. Se asocia un 1 a cada variable sin complementar
4. X se obtiene de interpretar en base 2 el código obtenido. Ej: $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \rightarrow 010 \rightarrow 2 \rightarrow m_2$

Ejemplo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_0 + m_2 + m_3 + m_7 = \sum(0,2,3,7)$$

Funciones Combinacionales: Forma canónica conjuntiva

- Es un producto de sumas compuesto sólo de maxtérminos.
- Maxtérmino: término suma en el que aparecen todas las variables de la función, complementada o sin complementar, una única vez.
- Existen 2^n maxtérminos de n variables.

Ejemplo: para 3 variables hay 8 maxtérminos que son:

$$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z},\ \bar{x}+\bar{y}+z,\ \bar{x}+y+\bar{z},\ \bar{x}+y+\bar{z}$$
$$x+\bar{y}+\bar{z},\ x+\bar{y}+z,\ x+y+\bar{z},\ x+y+z$$

Funciones Combinacionales: Forma canónica conjuntiva

- Teorema: Dada una lista completa de los maxtérminos de n variables, si a cada una de las n variables se le asigna el valor 0 o 1, entonces sólo un maxtérmino de la lista tomará el valor 0 y los otros el valor 1.

Ejemplo:

Para xyz=110, sólo el maxtérmino $\overline{x}+\overline{y}+z$ toma valor 0, el resto toma el valor 1.

Funciones Combinacionales: Forma canónica conjuntiva

- Teorema: Cada función de conmutación completamente especificada puede expresarse en forma canónica de maxtérminos.
- Teorema: La forma canónica de maxtérminos de una función de conmutación completamente especificada es única.

Ejemplo

$$g(x,y,z)=(x+y+z)(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

$$\begin{aligned} g(x,y,z)=0 \Leftrightarrow & (x+y+z)=0 \rightarrow x=0, y=0, z=0 \\ & (x+\bar{y}+z)=0 \rightarrow x=0, y=1, z=0 \\ & (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})=0 \rightarrow x=1, y=1, z=1 \end{aligned}$$

Funciones Combinacionales: Forma canónica conjuntiva

Notación M: Cada maxtérmino se representa de la forma “M_X” donde “X” es un número asociado a cada maxtérmino de forma que:

1. Se establece un orden entre las variables. Ej. (x_1,x_2,x_3)
2. Se asocia un 0 a cada variable sin complementar
3. Se asocia un 1 a cada variable complementada

- X se obtiene de interpretar en base 2 el código obtenido. Ej: $\overline{x}_1+x_2+x_3 \rightarrow 100 \rightarrow 4 \rightarrow M_4$

Ejemplo:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=M_7+M_5+M_4+M_0=\prod(0,2,3,7)$$