
Bloque 1. Herramientas matemáticas

Tema 1.4 Análisis en frecuencia

Autor: Isabel M. Gómez González

Usted es libre de copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra y de hacer obras derivadas siempre que se cite la fuente y se respeten las condiciones de la licencia Attribution-Share alike de Creative Commons.

Texto completo de la licencia: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

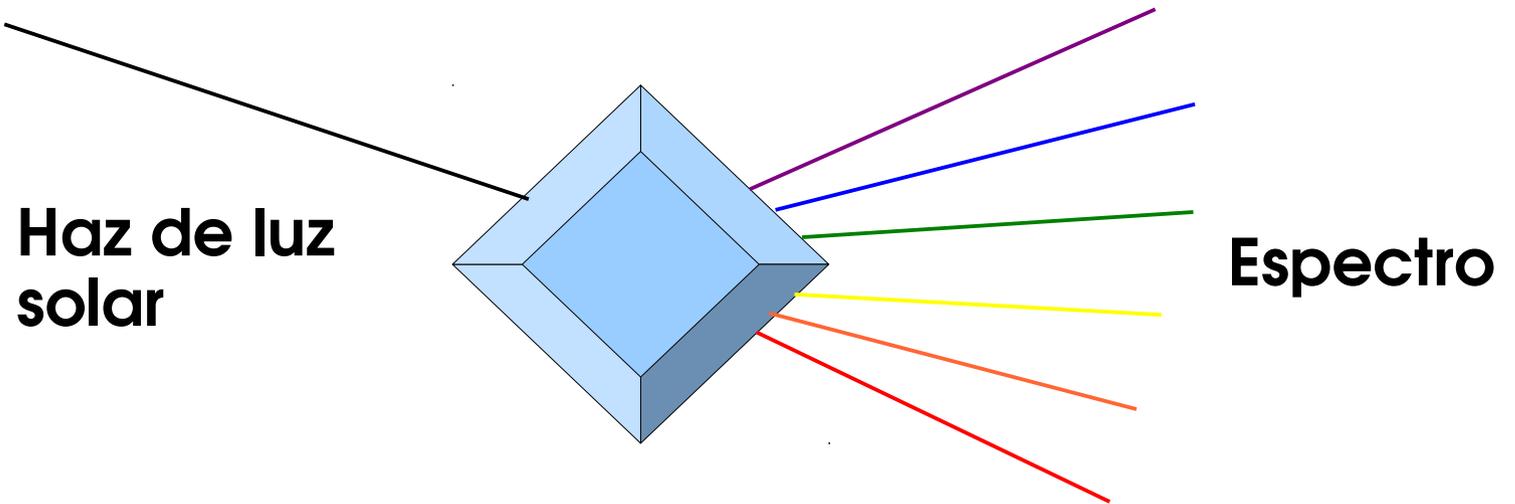
Índice

- **Introducción**
- **Series de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo**
- **Espectro densidad de potencia para señales periódicas**
- **Transformada de Fourier para señales aperiódicas continuas en el tiempo**
- **Espectro densidad de energía de señales aperiódicas**
- **Serie de Fourier para señal periódica discreta en el tiempo**
- **Espectro densidad de potencia de señales periódicas discretas en el tiempo**
- **Transformada de Fourier para señales aperiódicas discretas en el tiempo**
- **Espectro densidad de energía de señales aperiódicas discretas en el tiempo**

Índice

- **Relación entre la transformada de Fourier y la transformada z**
- **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**
- **Propiedades de la transformada de Fourier**
- **Respuesta frecuencial de los sistemas LTI**
- **Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia**

1. Introducción



Si se hace pasar un haz de luz blanca por un prisma, se descompone en haces de colores. Cada color corresponde a una frecuencia específica del espectro visible. El término espectro para referirse a esta descomposición fue utilizado por primera vez por Newton en 1672. Un ejemplo de utilización del concepto de espectro es la identificación de las líneas espectrales que emite un elemento químico cuando se calienta, esto constituye una forma de análisis en frecuencia.

1.Introducción

El análisis de frecuencia de una señal implica la descomposición de una señal en sus componentes sinusoidales que son básicamente funciones del tiempo.

Las componentes frecuenciales de la señal proporcionan una identidad o firma de la señal que la distingue de otras.

También es posible la síntesis de una señal a partir de sus componentes frecuenciales.

El proceso que permite obtener el espectro de una señal dada utilizando herramientas matemáticas se denomina *análisis espectral*.

El proceso de determinar el espectro de una señal basándose en medidas reales de la misma, se denomina *estimación espectral*.

2. Series de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo

Una señal periódica puede expresarse mediante una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

F_0 es la frecuencia fundamental y $T_p = 1/F_0$ es el periodo de $x(t)$.

El cálculo de los coeficientes de esta serie se realiza mediante la expresión

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Es importante garantizar que la serie convergerá a $x(t)$. Esto requiere que $x(t)$ cumpla una serie de requisitos.

3. Espectro densidad de potencia para señales periódicas

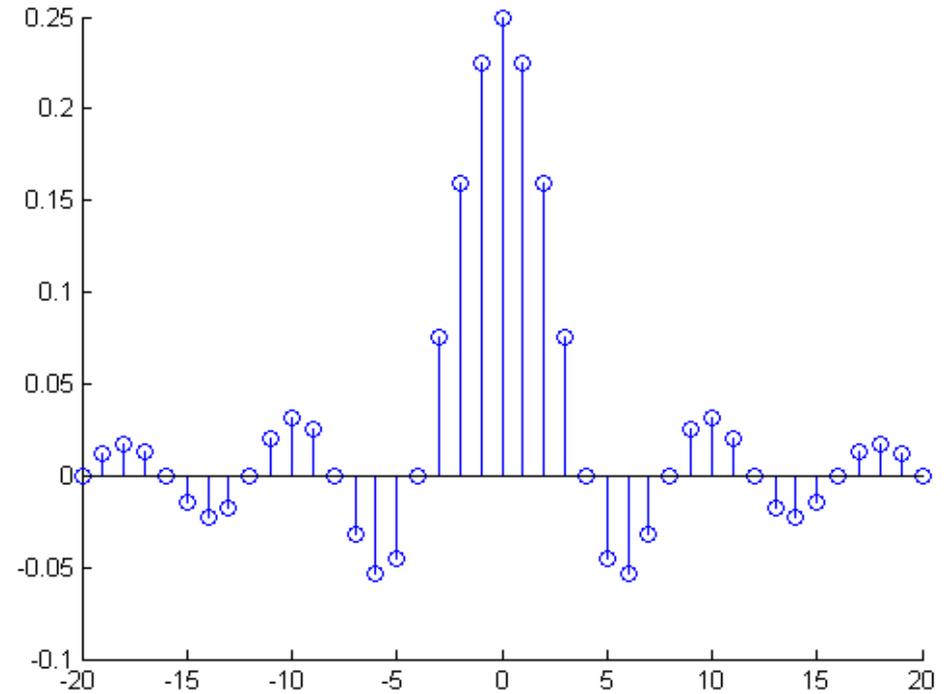
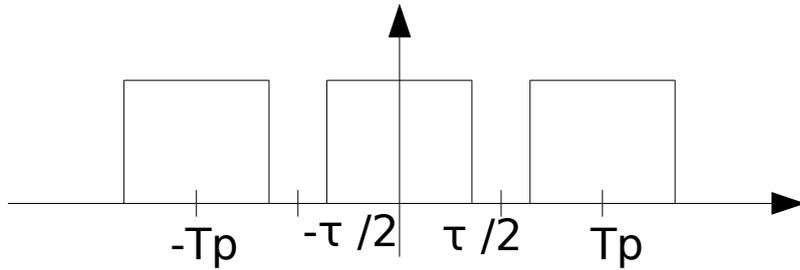
Las señales periódicas son señales de potencia. Podemos establecer las siguientes relaciones

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) x^* dt = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2k\pi F_0 t} dt$$
$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} c_k^* \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2k\pi F_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

La potencia media de la señal es la suma de las potencias medias de todos los armónicos kF_0 . La representación de P_x frente a la frecuencias se denomina espectro de densidad de potencia, solo existe en valores discretos de frecuencia. El espaciado entre líneas coincide con el valor de la frecuencia fundamental.

3. Espectro densidad de potencia para señales periódicas

Ejemplo



$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_p}$$

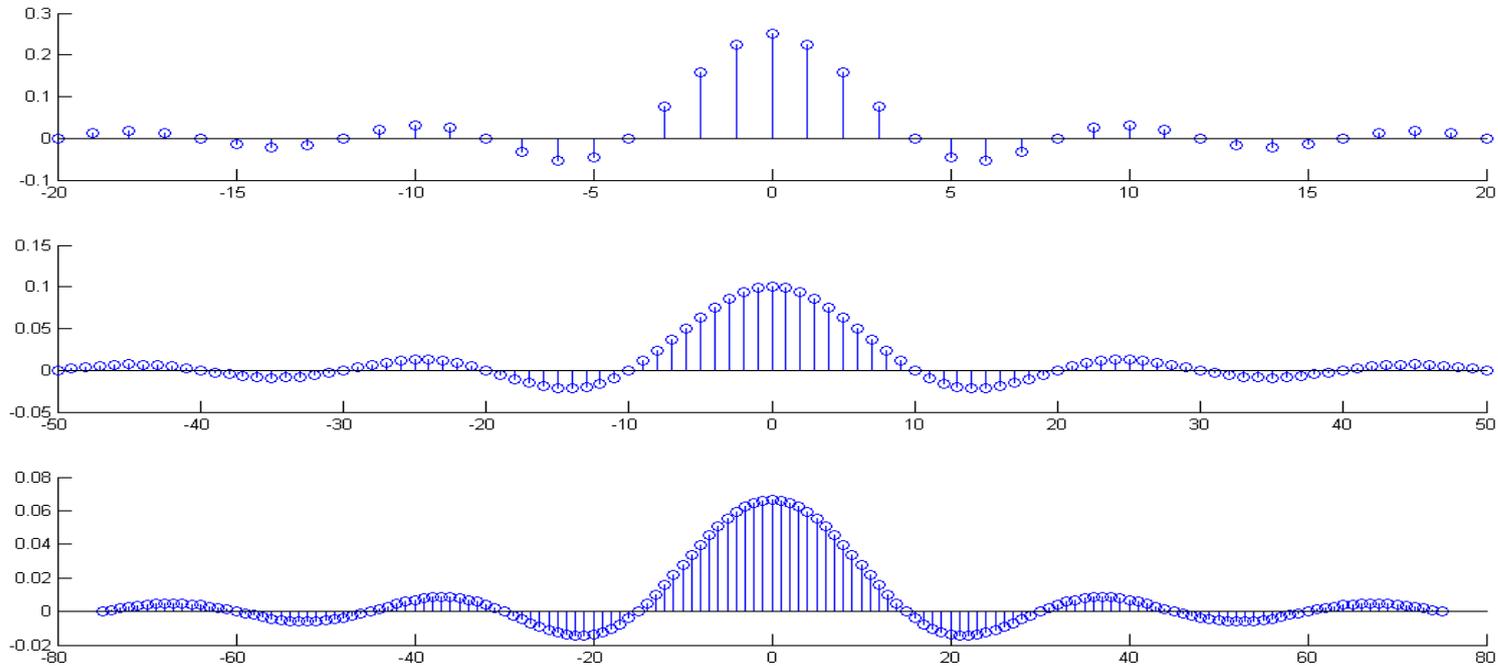
$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{A\tau}{T_p} \frac{\text{sen } \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

```
k=(-20:20); %número de muestras a representar
A=1.; p=0.2; %altura y anchura del pulso
Tp= 4*p; Ff=1./Tp;%frecuencia y periodo fundamental
```

```
gk= (A*p./Tp)*(sin(pi*k*Ff*p)./(pi*Ff*k*p));
gk(21)=A*p./Tp;
```

```
stem(k,gk);
```

3. Espectro densidad de potencia para señales periódicas



```
A=1.; p=0.2; %altura y anchura del pulso
Tp= 4*p; Ff=1./Tp; %frecuencia y periodo fundamental
N=round (50*pi/(2*pi*Ff)) %rango de representación
k=(-N:N); %número de muestras a representar
gk= (A*p./Tp)*(sin(pi*k*Ff*p)./(pi*Ff*k*p));
gk(N+1)=A*p./Tp;
subplot (3,1,1)
stem(k,gk);
```

```
Tp= 10*p; Ff=1./Tp;%frecuencia y periodo fundamental
N=round (50*pi/(2*pi*Ff)) %rango de representación
k=(-N:N); %número de muestras a representar
gk= (A*p./Tp)*(sin(pi*k*Ff*p)./(pi*Ff*k*p));
gk(N+1)=A*p./Tp;
subplot (3,1,2)
stem(k,gk);
```

4. Transformada de Fourier para señales aperiódicas continuas en el tiempo

El ejemplo anterior nos permite apreciar que el aumento del periodo disminuye el espaciado entre líneas. En el límite cuando el periodo se hace infinito, la señal se hace aperiódica y su espectro continuo. La frecuencia se convierte en una variable continua y el sumatorio de la serie de Fourier pasa a ser una integral que es la transformada de Fourier.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$
$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

5. Espectro densidad de energía de señales aperiódicas

Sea $x(t)$ cualquier señal con energía finita con transformada de Fourier $X(F)$.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF, \quad \text{relación de Parseval}$$

El espectro es una magnitud compleja que se puede expresar en forma Polar.

$$X(F) = |X(F)| e^{j\Theta(F)}$$

Esto nos permite definir el espectro densidad de energía de $x(t)$ de la forma.

$$S_{xx} = |X(F)|^2$$

Esta magnitud nos permitirá calcular la energía de la señal en las diferentes bandas de frecuencia.

6. Serie de Fourier para señal periódica discreta en el tiempo

El rango de frecuencia para señales discretas en el tiempo se limita al intervalo $(-\pi, \pi)$ o $(0, 2\pi)$. Una señal discreta en el tiempo de periodo N puede contar de componentes separadas $1/N$, en consecuencia la serie de Fourier constará como máximo de N componentes (DFS).

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier forman una secuencia periódica de periodo N .

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k(n+N)/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k(n)/N} = c_k$$

Cualquier conjunto de N muestras proporcionan una descripción completa de la señal o de su espectro.

7. Espectro densidad de potencia de señales periódicas discretas en el tiempo

La potencia media de una señal discreta en el tiempo de periodo N se define

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2, \quad \text{relación de Parseval}$$

Si la señal $x[n]$ es real podemos establecer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}x^*[n] &= x[n] \\ c_k^* &= c_{-k} \\ |c_k| &= |c_{-k}| \quad \text{simetría par} \\ \angle c_k &= -\angle c_{-k} \quad \text{simetría impar}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la periodicidad de los coeficientes de Fourier

$$c_{k+N} = c_k$$

se pueden establecer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}|c_k| &= |c_{N-k}|, \quad \angle c_k = -\angle c_{N-k} \\ |c_0| &= |c_N|, \quad \angle c_0 = -\angle c_N = 0 \\ |c_1| &= |c_{N-1}|, \quad \angle c_1 = -\angle c_{N-1} \\ |c_{N/2}| &= |c_{N/2}|, \quad \angle c_{N/2} = 0 \quad \text{si } N \text{ es par} \\ |c_{(N-1)/2}| &= |c_{(N+1)/2}|, \quad \angle c_{(N-1)/2} = -\angle c_{(N+1)/2} \quad \text{si } N \text{ es impar}\end{aligned}$$

7. Espectro densidad de potencia de señales periódicas

Por tanto, para una señal real, el espectro $c_k=0,1,\dots,N/2$ para N par, o $k=0,1,2,\dots,(N-1)/2$ para N impar, especifica por completo la señal en el dominio de la frecuencia. Lo que es coherente con el hecho de que la frecuencia relativa más alta que se puede representar mediante una señal discreta en el tiempo es igual a π .

$$0 \leq \omega_k = 2\pi k/N \leq \pi, \text{ entonces } 0 \leq k \leq N/2$$

8.Transformada de Fourier para señales aperiódicas discretas en el tiempo

La transformada de Fourier de una señal de energía finita discreta en el tiempo se define (DTFT)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$X(\omega)$ representa el contenido en frecuencia de la señal $x[n]$.

Existen dos grandes diferencias entre esta transformada y la que es continua en el tiempo:

1. En una señal continua el rango de frecuencias va de $-\infty$ a ∞ , mientras que en la señal discreta va de $-\pi$ a π o de 0 a 2π . Es decir, $X(\omega)$ es periódica de período 2π .
2. La transformada es un sumatorio en lugar de una integral.

La transformada inversa corresponde a

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

9. Espectro densidad de energía de señales aperiódicas discretas en el tiempo

La energía de una señal discreta en el tiempo se define

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega, \quad \text{relación de Parseval}$$

El espectro $X(\omega)$ es una magnitud compleja que puede expresarse

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

Al igual que en el caso de las señales continuas, se define el espectro densidad de energía de $x[n]$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$$

9. Espectro densidad de energía de señales aperiódicas discretas en el tiempo

Si $x[n]$ es real, se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= X(-\omega) \\ |X(-\omega)| &= |X(\omega)| \\ \Im X(-\omega) &= -\Im X(\omega) \end{aligned}$$

Por lo tanto también se cumple

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$$

A partir de estas propiedades de simetría concluimos que el rango de frecuencias de señales discretas en el tiempo puede limitarse a $0 \leq \omega \leq \pi$ (es decir, la mitad de un periodo)

9. Espectro densidad de energía de señales aperiódicas discretas en el tiempo

Ejemplos. Determinar y dibujar el espectro de la señal

$$x[n] = a^n u[n], \quad -1 < a < 1$$

Como $|a| < 1$, la secuencia es absolutamente sumable.

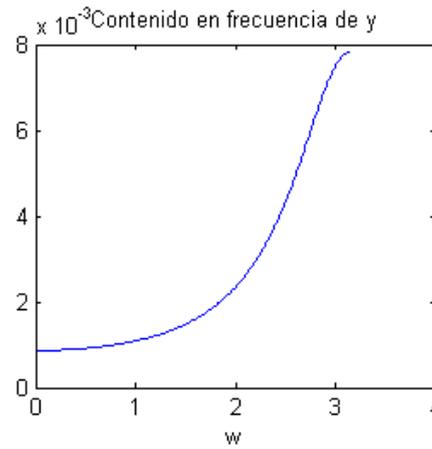
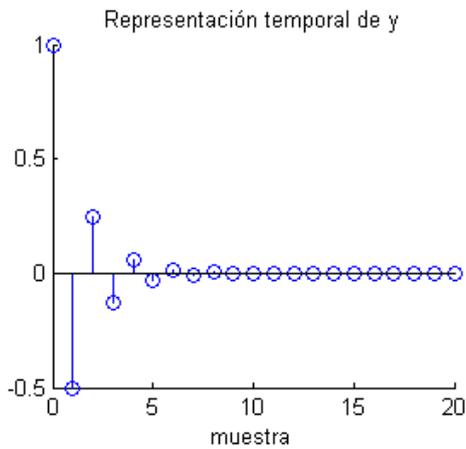
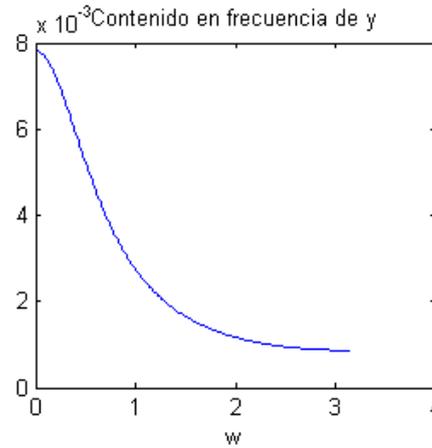
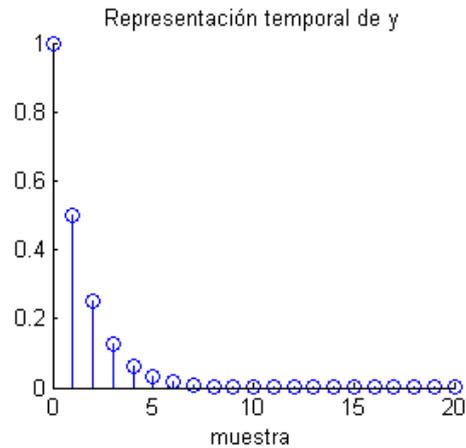
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Por tanto, existe la serie de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$S_{xx} = |X(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})(1 - a e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

9. Espectro densidad de energía de señales aperiódicas discretas en el tiempo



```

N=512;
nn=0:N;
w = 2*pi*(0:256)/512;
y=0.5.^nn;
Y = fft(y,N);
Pyy = Y.* conj(Y) / 512;
subplot(2,2,1)
stem (0:20,y(1:21))
title('Representación temporal de y')
xlabel('muestra')
subplot (2,2,2)
plot(w,Pyy(1:257)) %dibuja los 257
%primeros puntos, los otros son redundantes
title('Contenido en frecuencia de y')
xlabel('w')
y=(-0.5).^nn;
subplot(2,2,3)
stem (0:20,y(1:21))
title('Representación temporal de y')
xlabel('muestra')
Y = fft(y,N);
Pyy = Y.* conj(Y) / 512;
subplot (2,2,4)
plot(w,Pyy(1:257))
title('Contenido en frecuencia de y')
xlabel('w')
    
```

Cuando $a < 0$, la señal tiene mayor variación. Esto implica Componentes más altos de frecuencia.

10. Relación entre la transformada de Fourier y la transformada z

Consideremos la definición de transformada z:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Expresemos z en forma polar y sustituyamos en la expresión

$$X(z) \Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

Si $r=1$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Por tanto la transformada de Fourier puede interpretarse como la transformada z evaluada en el círculo unidad. La transformada de Fourier existirá si el círculo unidad pertenece a la región de convergencia de la transformada z.

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Hemos visto que la transformada de Fourier de una señal discreta en el tiempo aperiódica es una función continua de la frecuencia. Esta representación no es adecuada computacionalmente.

Es deseable disponer de herramientas matemáticas para trabajar de manera discreta con la transformada, es decir, a partir de las muestras de su espectro.

Una representación en el dominio de la frecuencia como esta nos lleva a la DFT.

Antes de enunciar la definición de esta transformada veremos una serie de conceptos.

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

Consideremos una señal aperiódica discreta en el tiempo $x[n]$ cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Supongamos que muestreamos $X(\omega)$ periódicamente en frecuencias equiespaciadas $\delta\omega = 2\pi/N$ radianes.

$$X\left[\frac{2\pi}{N}k\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

Dividimos esta suma infinita en una suma infinita de intervalos de N muestras

$$X\left[\frac{2\pi}{N}k\right] = \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \dots = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

$$X\left[\frac{2\pi}{N}k\right] = \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \dots = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Si cambiamos el índice del sumatorio interno de n a $n-lN$ e intercambiamos el orden de los sumatorios

$$X\left[\frac{2\pi}{N}k\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN] \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

La señal

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

Obtenida por repetición periódica de $x[n]$ cada N muestras es periódica de periodo N .

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

Puede expandirse como serie de Fourier

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}k} \quad n=0,1,\dots,N-1$$

Lo que nos lleva a las relaciones

$$c_k = \frac{1}{N} X \left[\frac{2\pi}{N} k \right]$$
$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

Esto nos dice que puedo recuperar $x_p[n]$ a partir de las muestras del espectro, lo que no implica que pueda recuperar $x[n]$.

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

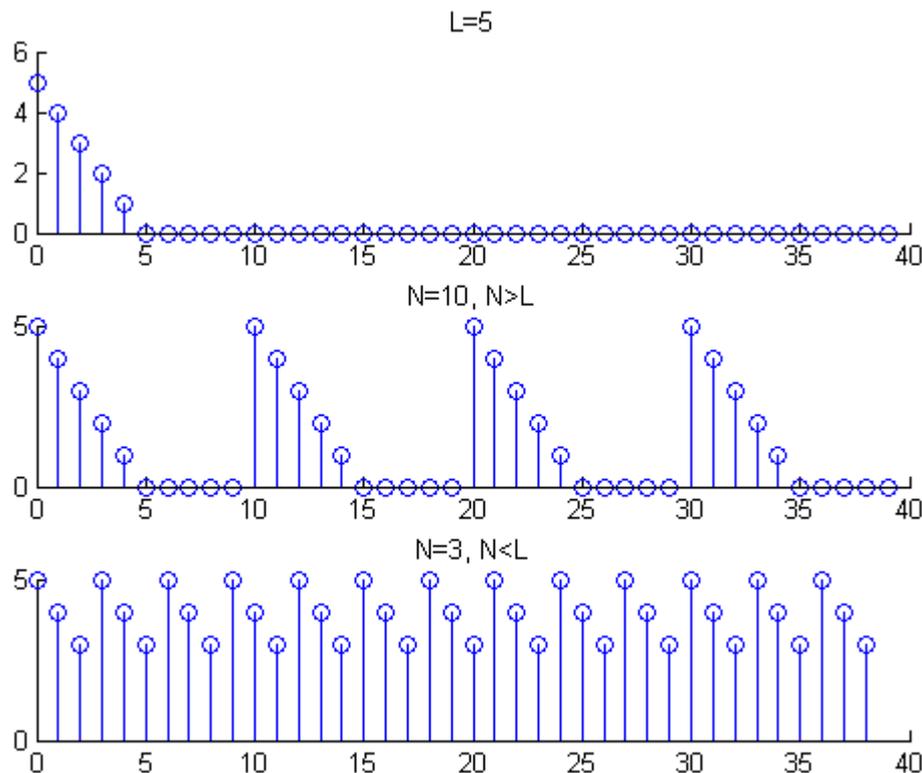
$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] e^{j \frac{2\pi n}{N} k}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

La recuperación puede realizarse si $x[n]$ esta limitada en el tiempo por un periodo $L < N$. En este caso $x[n]=x_p[n]$, $0 \leq n \leq N-1$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Muestreo en el dominio de la frecuencia y reconstrucción de señales discretas en el tiempo

La recuperación puede realizarse si $x[n]$ esta limitada en el tiempo por un periodo $L < N$. En este caso $x[n]=x_p[n]$, $0 \leq n \leq N-1$



```
L=5;
n=4;
N=10; %N>L
M=n*N;
```

```
nn=[0:(N-1)];
x=zeros(M,1);
x(1:L)=[5 4 3 2 1];
y=zeros(M,1);
```

```
for l=0:(n-1)
y(l*N+1:l*N+N-1+1)=x(1:N);
end
```

```
subplot(3,1,1)
stem(0:M-1,x(1:M));
title('L=5')
subplot(3,1,2)
stem(0:M-1,y);
title('N=10, N>L')
```

```
N=3;%N<L
n=13;
M=n*N;
```

```
nn=[0:(N-1)];
x=zeros(M,1);
x(1:L)=[5 4 3 2 1];
y=zeros(M,1);
```

```
for l=0:(n-1)
y(l*N+1:l*N+N-1+1)=x(1:N);
end
```

```
subplot(3,1,3)
stem(0:M-1,y);
title('N=3, N<L')
```

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Ejemplo. Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1$$

El espectro de esta señal se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k=0,1,\dots,N-1$. Determinar los espectros reconstruidos para $a=0.8$ cuando $N=5$ y $N=50$.

La transformada de Fourier continua y muestreada vienen dadas por las expresiones

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$X(\omega_k) = X\left[\frac{2\pi k}{N}\right] = \frac{1}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN] = \sum_{l=-\infty}^0 a^{n-lN} = a^n \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} = \frac{a^n}{1 - a^N},$$

$$\frac{1}{1 - a^N}, \quad \text{efecto aliasing si } a < 1 \text{ tiende a } 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Ejemplo. Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1$$

El espectro de esta señal se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k=0,1,\dots,N-1$. Determinar los espectros reconstruidos para $a=0.8$ cuando $N=5$ y $N=50$.

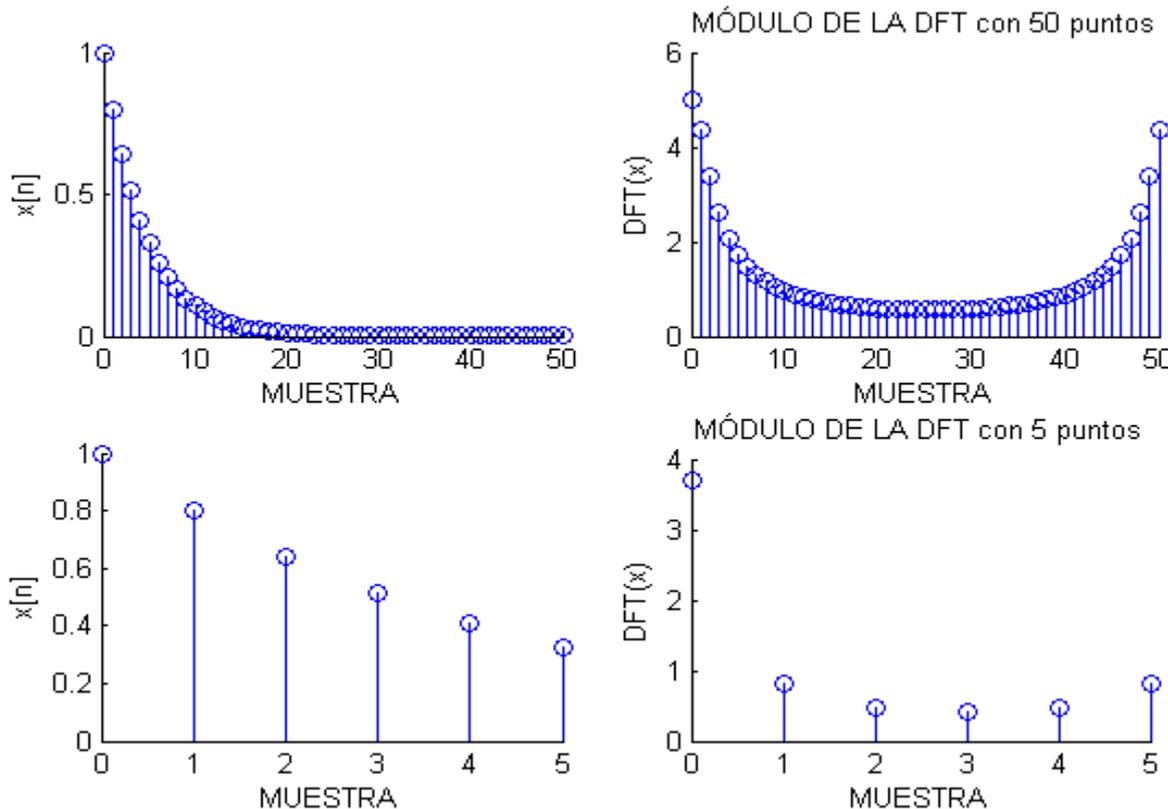
$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$
$$X(\omega_k) = X\left[\frac{2\pi k}{N}\right] = \frac{1}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Ejemplo. Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1$$

El espectro de esta señal se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, $k=0,1,\dots,N-1$. Determinar los espectros reconstruidos para $a=0.8$ cuando $N=5$ y $N=50$.



```
N=50
nn=0:N;
xx=0.8.^nn;
XX=fft(xx);
M=5
kk=0:M;
yy=0.8.^kk;
YY=fft(yy);
```

```
subplot (221), stem (nn,xx);
xlabel('MUESTRA'),ylabel('x[n]')
```

```
subplot (222), stem (nn,abs(XX));
xlabel('MUESTRA'),ylabel('DFT(x)')
title('MÓDULO DE LA DFT con 50 puntos')
```

```
subplot (223), stem (kk,yy);
xlabel('MUESTRA'),ylabel('x[n]')
```

```
subplot (224), stem (kk,abs(YY));
xlabel('MUESTRA'),ylabel('DFT(x)')
title('MÓDULO DE LA DFT con 5 puntos')
```

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Ejemplo. Considere la señal

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1$$

Si definimos la secuencia de duración finita con aliasing definida como

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x_p[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su transformada de Fourier queda

$$\hat{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-a^N} \cdot \frac{1-a^N e^{-j\omega N}}{1-a e^{-j\omega}}$$

Aunque esta transformada difiere de $X(\omega)$, los valores en las muestras $\omega_k = 2\pi k/N$ son idénticos.

$$\hat{X}\left[\frac{2\pi k}{N}\right] = \frac{1}{1-a^N} \cdot \frac{1-a^N}{1-a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Definición

La transformada de Fourier nos permite convertir una secuencia $\{x[n]\}$ de longitud $L < N$ en una secuencia de muestras en frecuencia $\{X(k)\}$ de longitud N dichas muestras se obtienen evaluando la transformada de Fourier $X(\omega)$ en un conjunto de N frecuencias discretas (igualmente espaciadas)

$$DFT: X(k) = X\left[\frac{2\pi k}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}, \quad K=0,1,\dots,N-1$$

$$IDFT: x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi n}{N}k}, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

Ejemplo

Determinar la DFT de esta secuencia para $N \geq L$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Ejemplo

Determinar la DFT de esta secuencia para $N \geq L$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La transformada de Fourier de la secuencia es:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$

Si la evaluamos en un conjunto de N frecuencias equiespaciadas:

$$X[k] = \frac{1 - e^{-j2\pi k L/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} = \frac{\text{sen}(\pi k L/N)}{\text{sen}(\pi k/N)} e^{-j\pi k(L-1)/2}$$

Si $N=L$ la DFT es

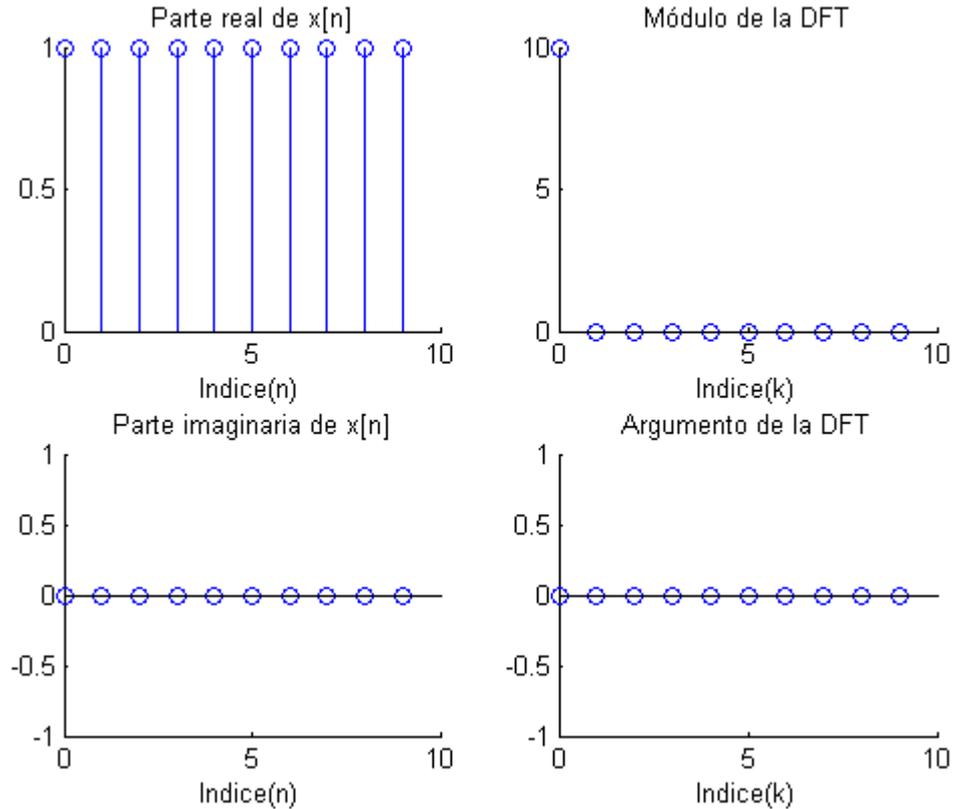
$$X[k] = \begin{cases} L, & k=0 \\ 0, & k=1, 2, \dots, L-1 \end{cases}$$

Proporciona una representación únivoca de $x[n]$ en el dominio de la frecuencia y nos permite representarla pero no tenemos una buena representación espectral. Para ello tendremos que interpolar más puntos.

11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

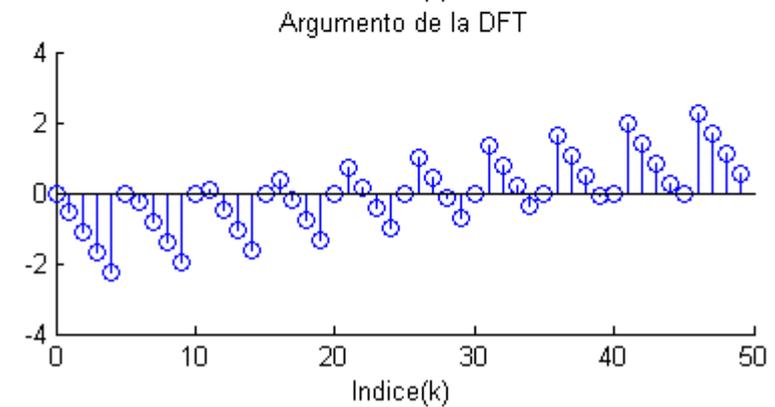
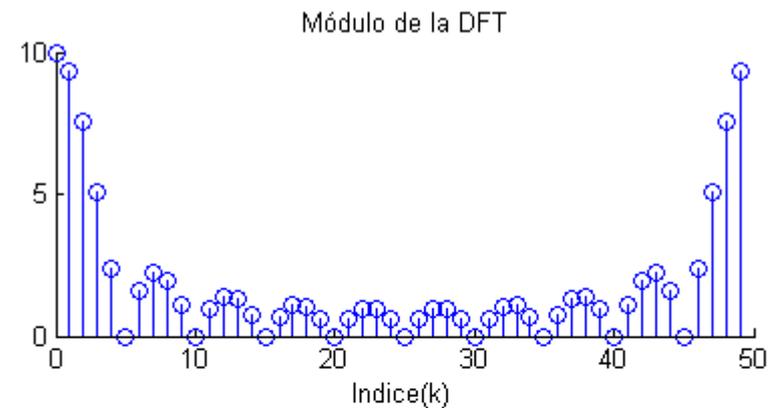
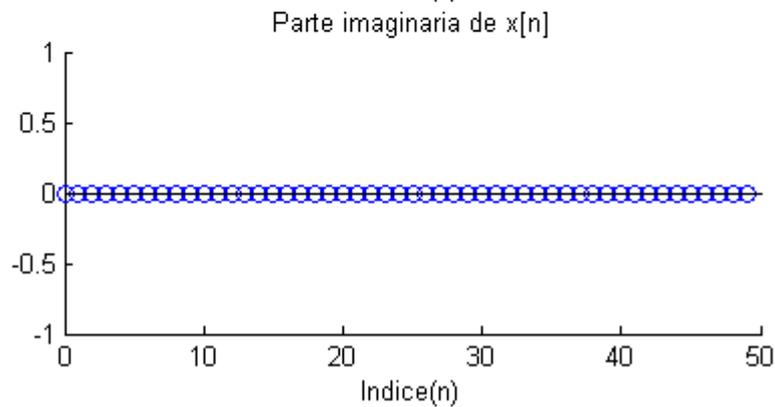
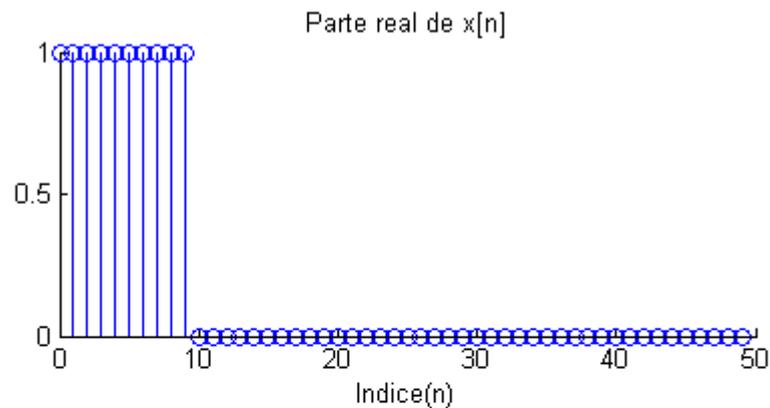
Ejemplo

```
N=10
L=10
kk=0:(N-1);
p=zeros(N,1);
p(1:L)=boxcar(L);
P=fft(p);
subplot(221)
stem(kk,real(p))
title('Parte real de x[n]'),xlabel('Indice(n)')
subplot(223)
stem(kk,imag(p))
title('Parte imaginaria de x[n]'),xlabel('Indice(n)')
subplot(222)
stem(kk,abs(P))
title('Módulo de la DFT'),xlabel('Indice(k)')
subplot(224)
stem(kk,angle(P))
title('Argumento de la DFT'),xlabel('Indice(k)')
```



11. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

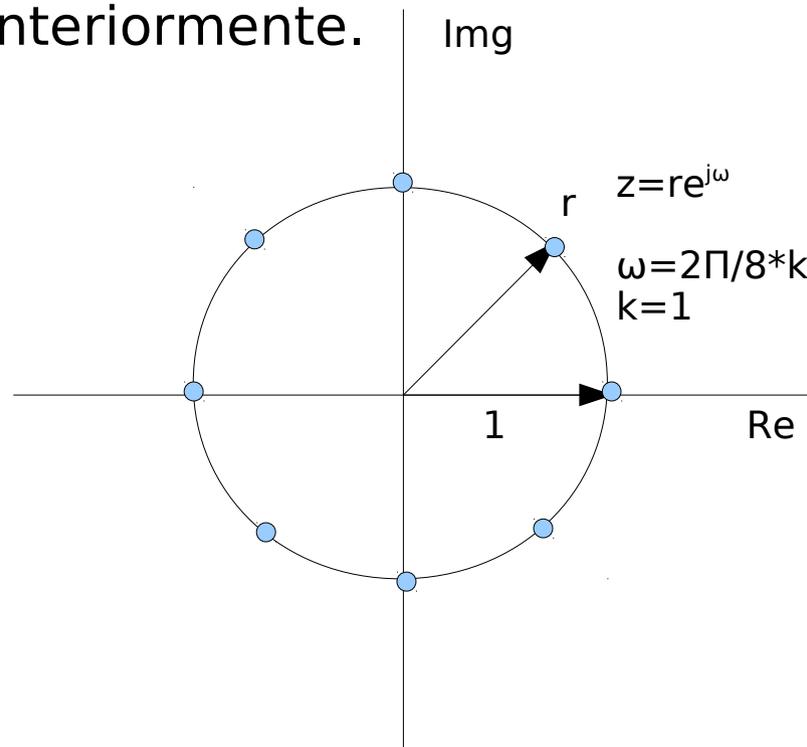
Ejemplo



11. La Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Relación entre ambas transformadas

Para relacionar ambas transformadas podemos considerar el plano z mencionado anteriormente.



La transformada discreta de Fourier no es continua en ω , si no que muestrea el intervalo $[0, 2\pi]$ en N valores equiespaciados.

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Las propiedades son útiles porque nos permiten reducir la complejidad de los problemas de análisis en frecuencia.

Vamos a centrarnos en las propiedades de la DTFT y en las de la DFT.

La demostración de estas propiedades puede encontrarse en la bibliografía.

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Las propiedades son útiles porque nos permiten reducir la complejidad de los problemas de análisis en frecuencia.

Vamos a centrarnos en las propiedades de la DTFT y en las de la DFT.

La demostración de estas propiedades puede encontrarse en la bibliografía.

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de simetría de la DTFT

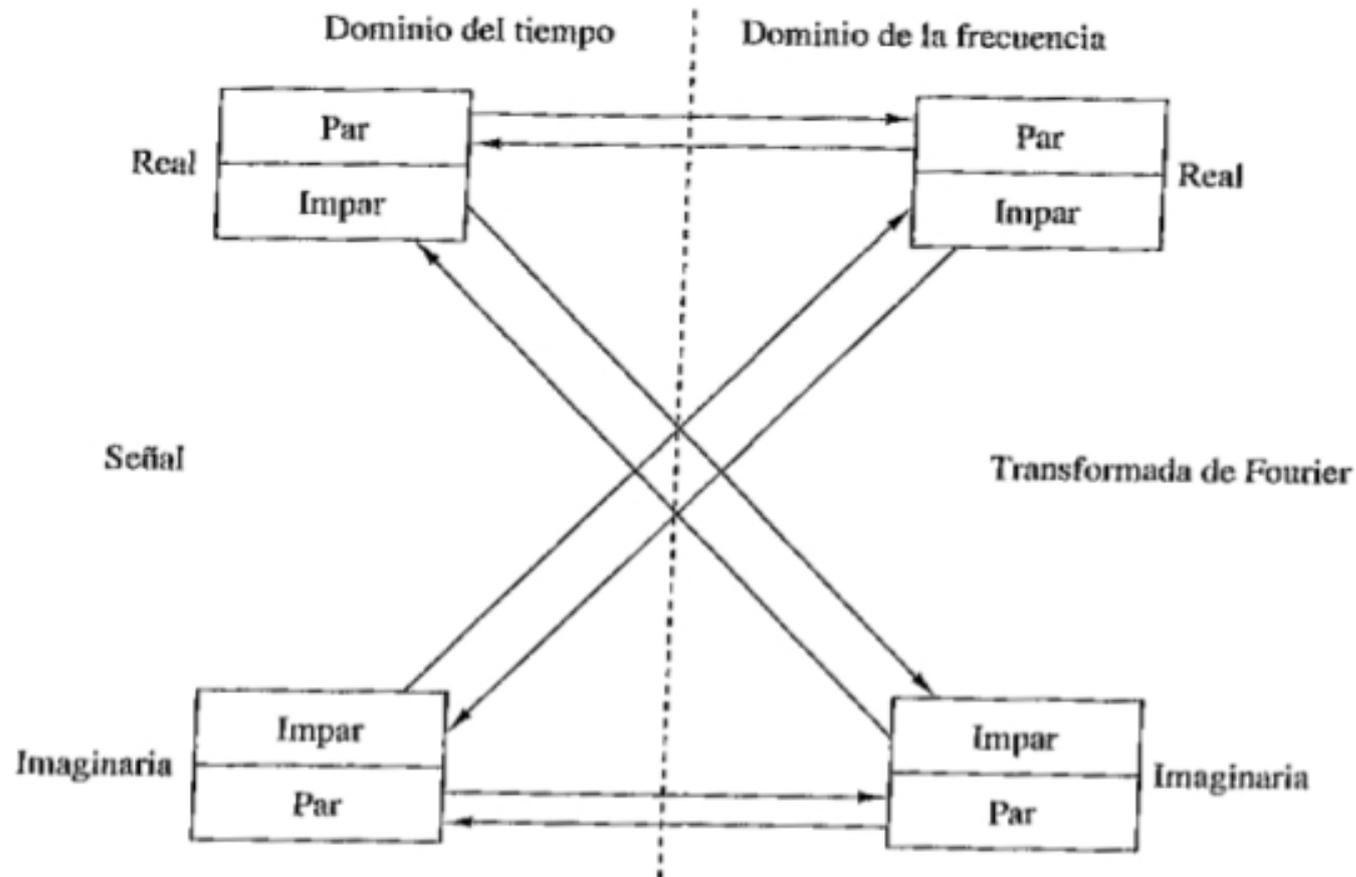
Cuando una señal satisface propiedades de simetría en el tiempo, dichas propiedades imponen condiciones de simetría en su transformada de Fourier. La aplicación de dichas propiedades nos lleva a fórmulas más sencillas.

Secuencia	DTFT
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$jX_I(\omega)$
Señales reales	
Cualquier señal real	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
$x(n)$	$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$
	$X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$
	$ X(\omega) = X(-\omega) $
	$\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$	$X_R(\omega)$
(real y par)	(real y par)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$	$jX_I(\omega)$
(real e impar)	(imaginaria e impar)

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de simetría de la DTFT

Cuando una señal satisface propiedades de simetría en el tiempo, dichas propiedades imponen condiciones de simetría en su transformada de Fourier. La aplicación de dichas propiedades nos lleva a fórmulas más sencillas.



12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de simetría de la DFT

Antes de enunciar estas propiedades estableceremos el concepto de simetría circular de una secuencia en la DFT.

Ya hemos visto que la DFT de N puntos de una secuencia de duración finita $x[n]$ de longitud $L \leq N$ es equivalente a una secuencia periódica $x_p[n]$ de periodo N que se obtiene expandiendo periódicamente $x[n]$

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

Supongamos que ahora desplazamos k unidades a la dcha $x_p[n]$.
Obtenemos otra secuencia periódica

$$x'_p[n] = x_p[n-k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-k-lN]$$

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de simetría de la DFT

Simetría circular de una secuencia en la DFT

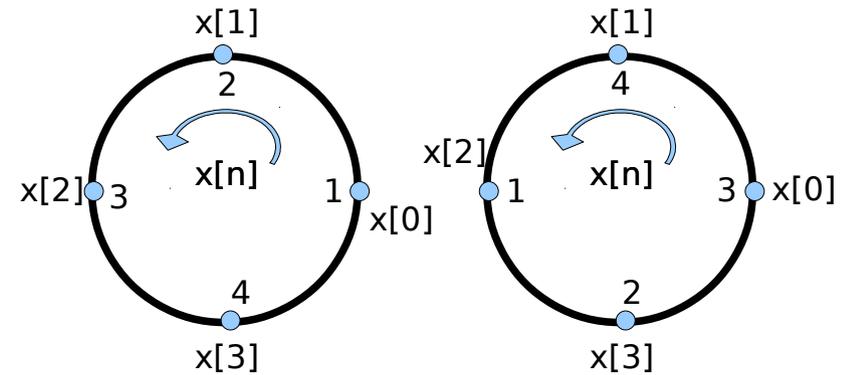
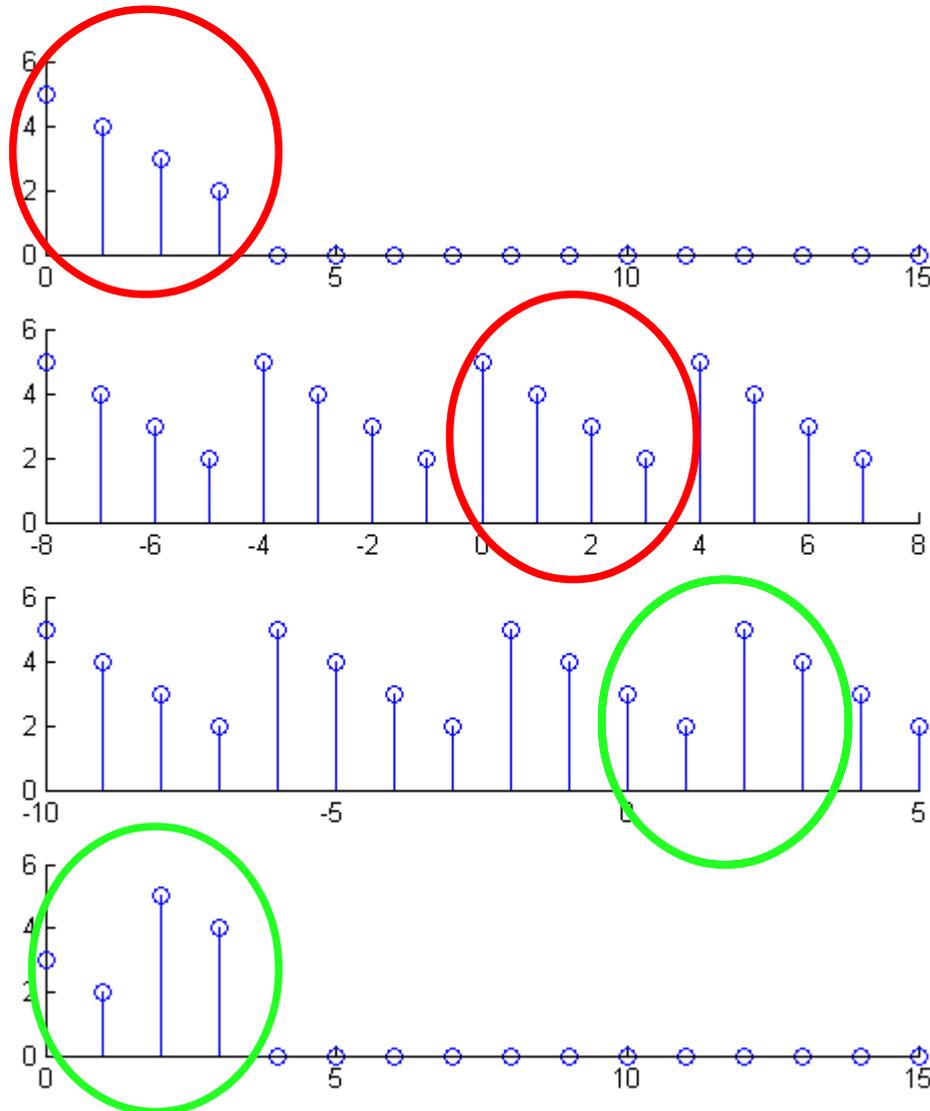
$$x'_p[n] = x_p[n-k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-k-lN]$$

La secuencia de duración finita

$$x'[n] = \begin{cases} x'_p[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Está relacionada con $x[n]$ mediante un desplazamiento circular

12. Propiedades de las transformadas de Fourier



12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de simetría de la DFT

Secuencia de N puntos $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$	DFT de N puntos
$x(n)$	$X(k)$
$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
$x_R(n)$	$X_{ce}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$
$jX_I(n)$	$X_{co}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	$jX_I(k)$
Señales reales	
Cualquier señal real $x(n)$	$X(k) = X^*(N-k)$
	$X_R(k) = X_R(N-k)$
	$X_I(k) = -X_I(N-k)$
	$ X(k) = X(N-k) $
	$\angle X(k) = -\angle X(N-k)$
$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)]$	$X_R(k)$
$x_{co}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)]$	$jX_I(k)$

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de la DTFT

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [si $x_2(n)$ es real]
Teorema de Wiener-Khintchine	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulación	$x(n) \cos \omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)$
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda)d\lambda$
Diferenciación en el dominio de la frecuencia	$nx(n)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de la DFT

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n + N)$	$X(k) = X(k + N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Inversión temporal	$x(N - n)$	$X(N - k)$
Desplazamiento temporal circular	$x((n - l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en frecuencia circular	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k - l))_N$
Conjugación compleja	$x^*(n)$	$X^*(N - k)$
Convolución circular	$x_1(n) \circledast x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Correlación circular	$x(n) \circledast y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
Multiplicación de dos secuencias	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \circledast X_2(k)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

En estas propiedades aparece el concepto de convolución circular que presenta algunas diferencias con la operación de convolución ya explicada y que pasamos a describir a continuación.

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de la DFT. Convolución circular.

Partimos de dos secuencias de longitud N , $x_1[n]$ y $x_2[n]$. sus DFTs de N puntos

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j2\pi nk/N}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

Si multiplicamos estas dos transformadas el resultado es otra $X_3[k]$ de una secuencia $x_3[n]$ de longitud N . Queremos ver la relación entre las tres secuencias a nivel temporal.

$$X_3[k] = X_1[k] X_2[k], \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3[k] e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] X_2[k] e^{j2\pi km/N}$$

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi nk/N} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] e^{-j2\pi lk/N} \right] e^{j2\pi km/N}$$

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right]$$

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de la DFT. Convolución circular.

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi nk/N} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] e^{-j2\pi lk/N} \right] e^{j2\pi km/N}$$
$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k(m-n-l)/N} \right]$$

El sumatorio entre corchetes tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a=1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \quad a = e^{j2\pi(m-n-l)/N}$$

$a=1$ cuando $m-n-l$ es un múltiplo de N . $a^N = 1$ para cualquier valor de $a \neq 0$, con lo que nos queda

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l=m-n+pN=(m-n)_N, \quad p \text{ entero} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_3[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[(m-n)_N]$$

Convolución circular

12. Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedades de la DFT. Convolución circular.

El desarrollo anterior demuestra una propiedad importante de la DFT

$$X_3[k] = X_1[k] X_2[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

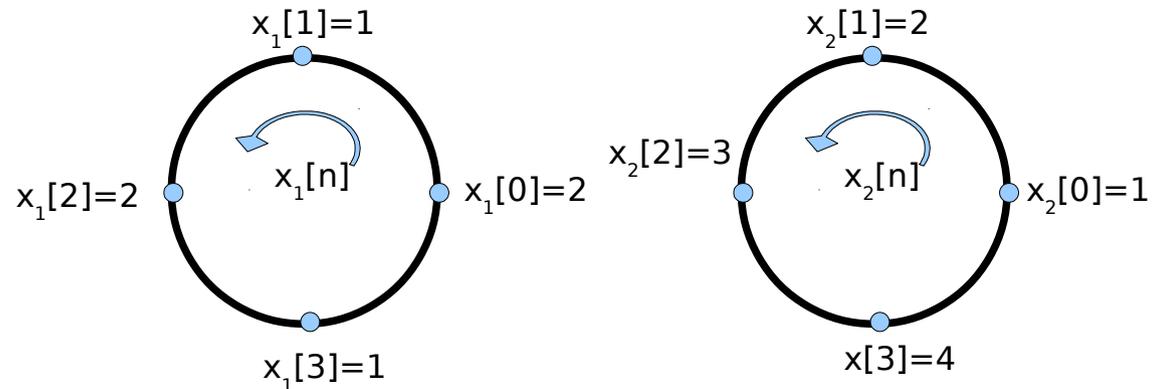
$$x_3[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[(m-n)_N]$$

Ejemplo:

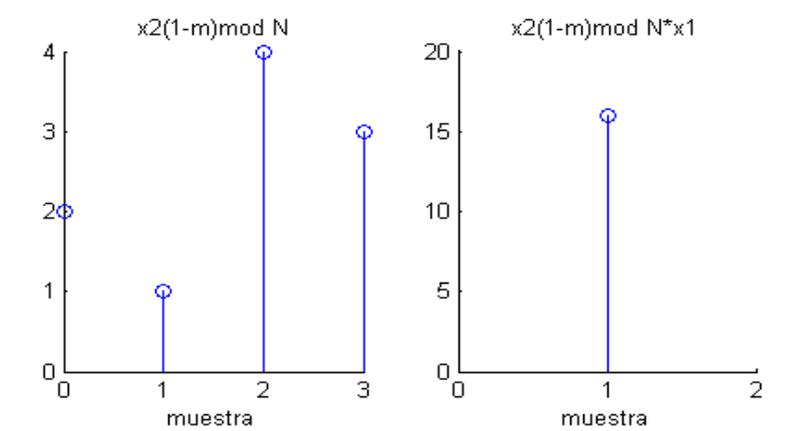
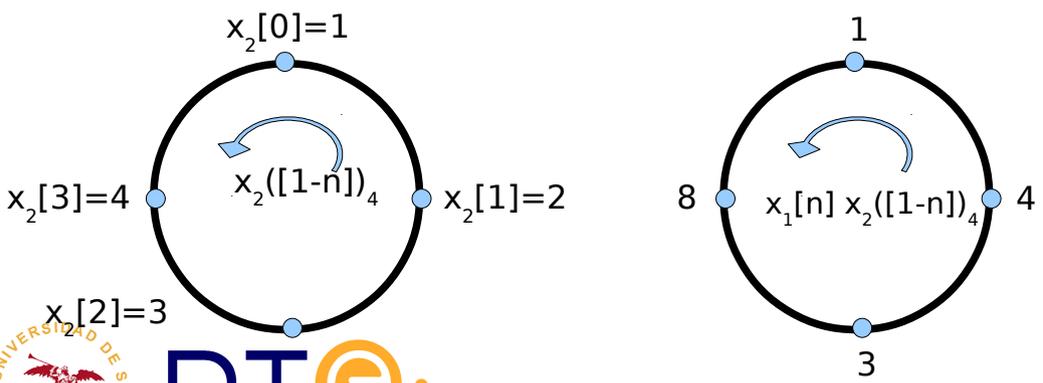
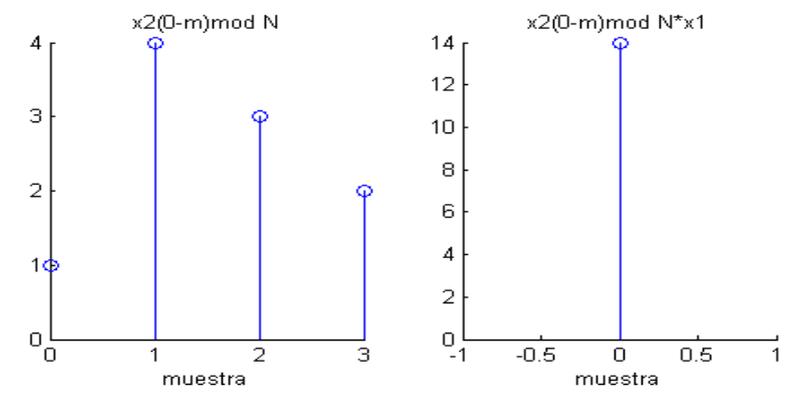
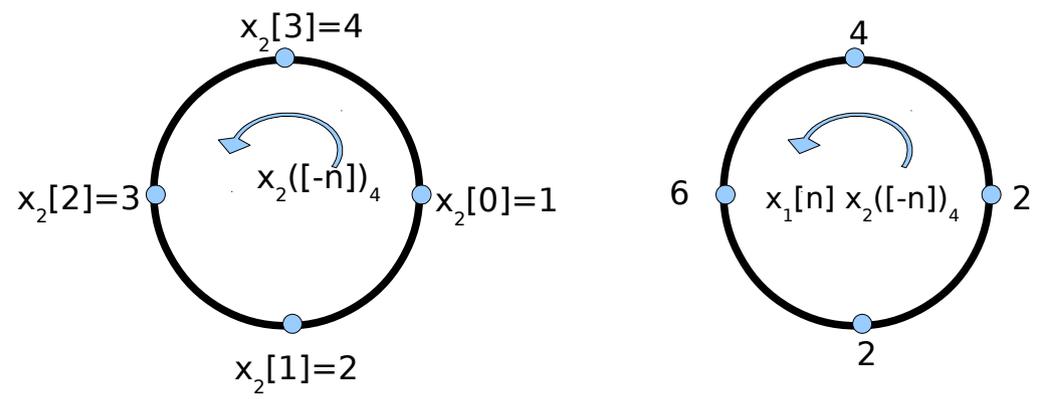
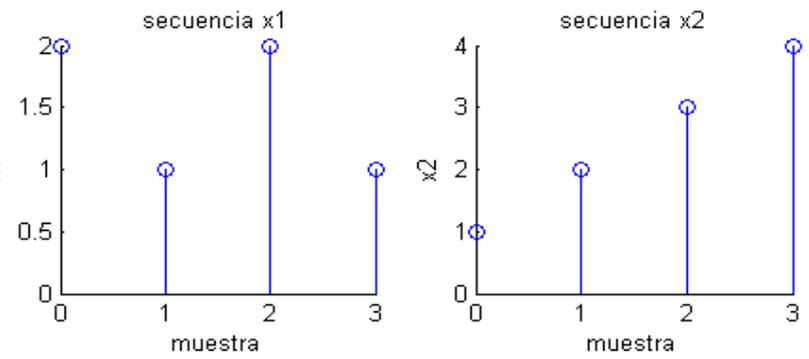
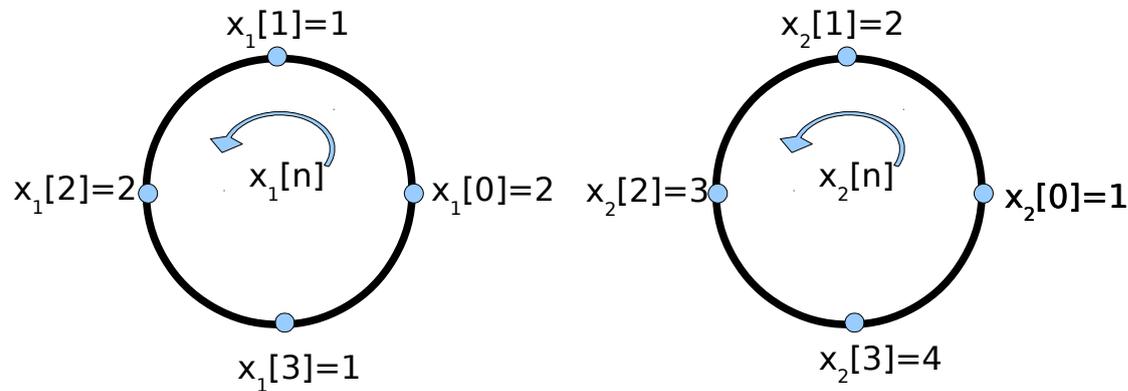
Calcular convolución circular de las secuencias:

$$x_1[n] = \{2 \underline{1} 2 1\}$$

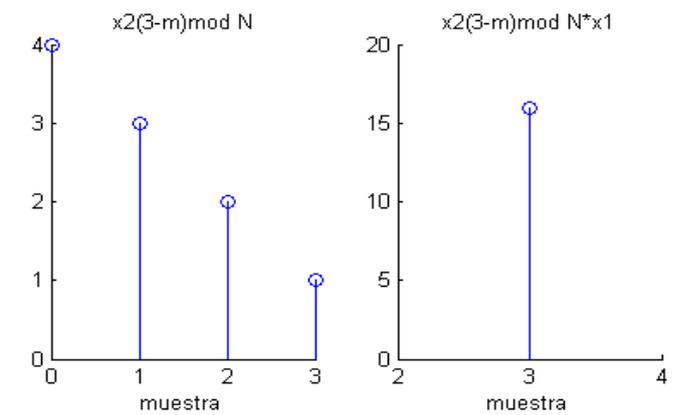
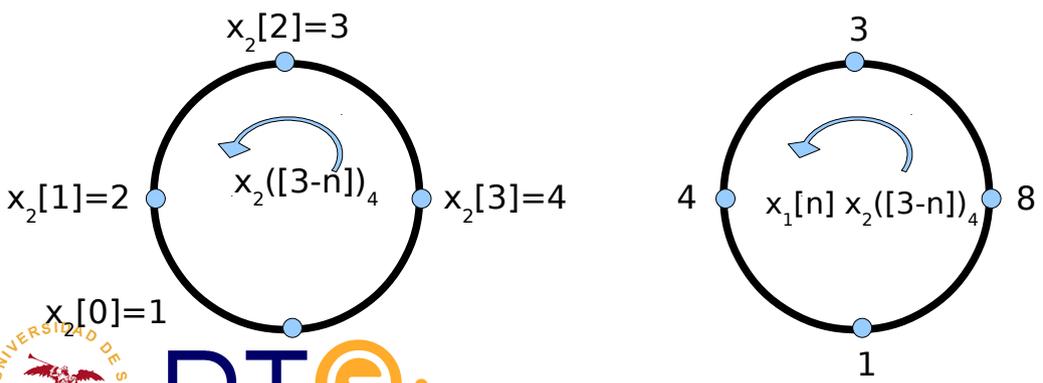
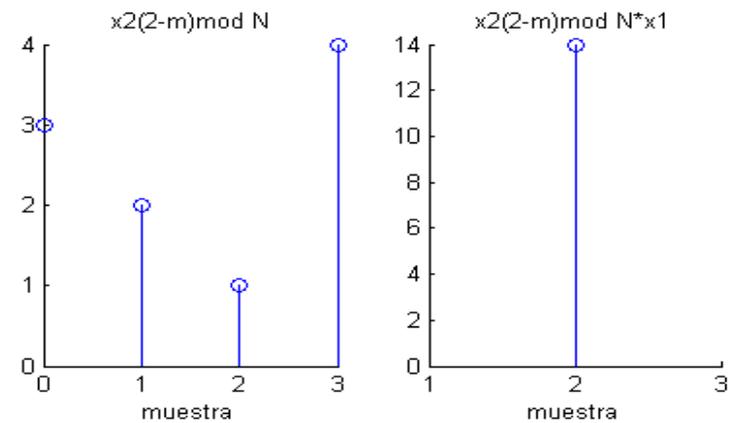
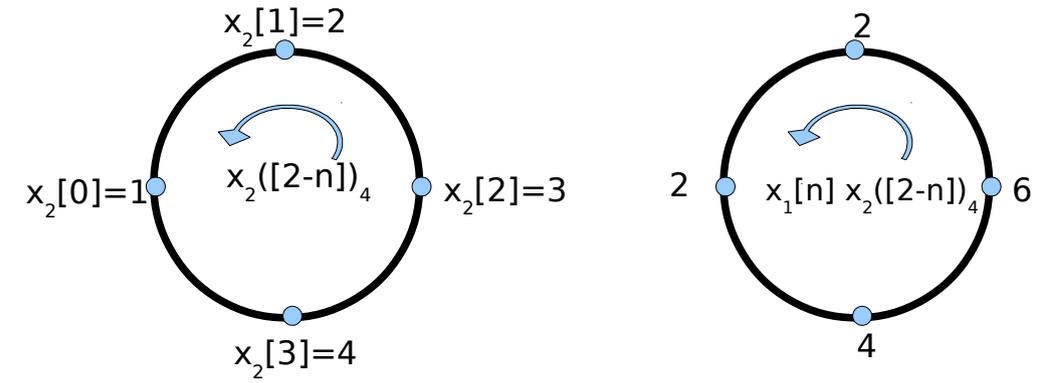
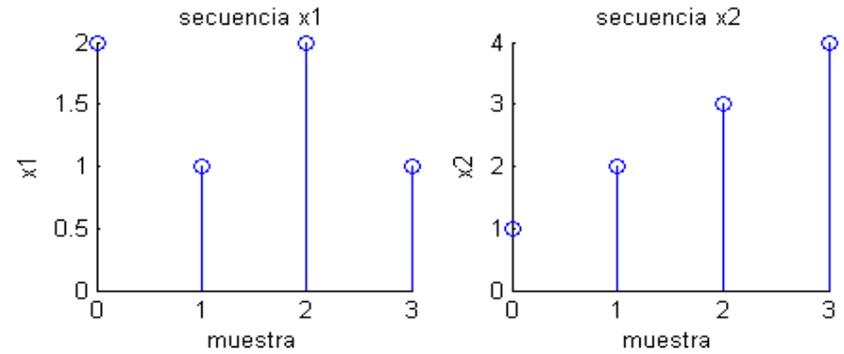
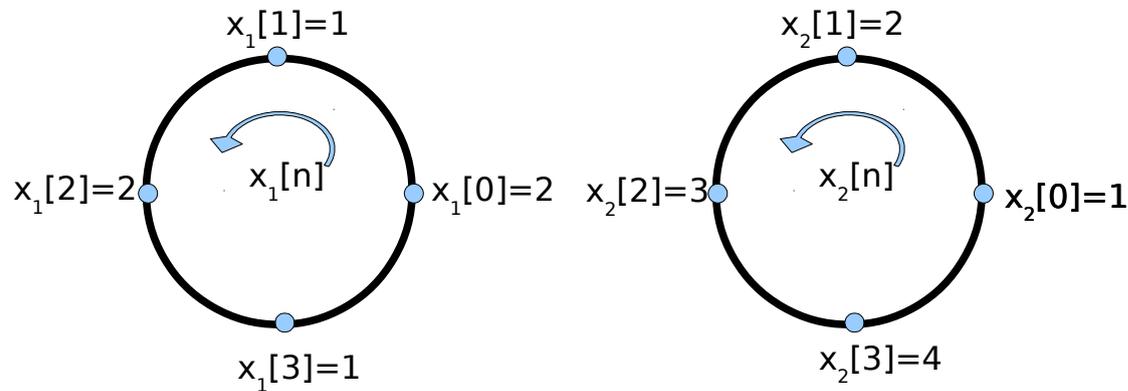
$$x_2[n] = \{1 \underline{2} 3 4\}$$



12. Propiedades de las transformadas de Fourier



12. Propiedades de las transformadas de Fourier



13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Es importante caracterizar a los sistemas lineales invariantes con el tiempo en el dominio de la frecuencia. Esto nos permite clasificarlos de acuerdo al tipo de filtrado que realizan.

Para realizar este estudio, se evalúa cómo responden ante señales sinusoidales, exponenciales complejas o una combinación lineal de las anteriores. La metodología es adecuada tanto para señales periódicas como aperiódicas, ya que estas últimas pueden considerarse como una superposición de exponenciales complejas de tamaño infinitesimal.

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Respuesta de un sistema discreto ante una exponencial periódica

La respuesta de un sistema de respuesta impulsiva $h[n]$ que se excita con una secuencia exponencial periódica viene dada por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Si se define la función: $H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$

Nos queda: $y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = H(\omega) e^{j\omega n}$

$H(\omega)$ es la respuesta frecuencial, se trata de una función periódica con parámetro real ω y periodo 2π .

La respuesta $y[n]$ es otra exponencial compleja de la misma frecuencia que la entrada, pero modificada por el factor multiplicativo $H(\omega)$.

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Respuesta de un sistema discreto ante una exponencial periódica

Ejemplo.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$
$$x[n] = Ae^{j\pi n/2} \quad -\infty < n < \infty$$

Transformada de Fourier de la función impulso

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

la valoramos en $\omega = \pi/2$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ}$$

Calculamos la salida

$$y[n] = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ} \right) e^{j\pi n/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j\pi n/2 - 26,6^\circ}$$

El efecto sobre la señal de entrada es un cambio en la amplitud y en la fase. Para otra entrada de otra frecuencia el efecto será diferente.

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Dada la expresión de $H(\omega)$, función periódica de periodo 2π , vemos que se trata de su expansión en serie de Fourier

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$h[k]$ son los coeficientes de esta serie y por lo tanto responderán a la expresión

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega k} d\omega$$

En un sistema lineal invariante con el tiempo, se cumplen determinadas propiedades de simetría dado que los componentes de la respuesta impulsiva son reales

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \omega k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \operatorname{sen} \omega k = H_R(\omega) + j H_I(\omega)$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \quad \Theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$$

El módulo es par y la fase impar. Basta con conocer estas funciones en el intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$.

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Se puede utilizar la propiedad de superposición para determinar la respuesta de un sistema a señales de entrada compuestas de exponenciales más complejas.

Ejemplo

Ecuación del sistema: $y[n] = ay[n-1] + bx[n]$, $0 < a < 1$

Entrada: $x[n] = 5 + 5\text{sen}\frac{\pi}{16}n - 5\cos\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)$

Respuesta en frecuencia del sistema:

$$H(\omega) = \frac{b}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = \angle b - \tan^{-1} \frac{a \text{sen } \omega}{1 - a \cos \omega}$$

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Ejemplo

$$y[n] = ay[n-1] + bx[n], \quad 0 < a < 1$$

$$\text{Entrada: } x[n] = 5 + 5\text{sen} \frac{\pi}{16}n - 5\text{cos} \left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4} \right)$$

Calculamos b para que el máximo de la respuesta en frecuencia sea 1. Puesto que $a > 0$, se alcanzará para $\omega = 0$.

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1-a} = 1 \Rightarrow b = \pm(1-a)$$

$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = \angle b - \tan^{-1} \frac{a \text{sen} \omega}{1 - a \cos \omega}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a \text{sen} \omega}{1 - a \cos \omega}$$

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Ejemplo

$$y[n] = ay[n-1] + bx[n], \quad 0 < a < 1$$

Entrada: $x[n] = 5 + 5 \operatorname{sen} \frac{\pi}{16} n - 5 \cos \left(\frac{3\pi}{4} n + \frac{\pi}{4} \right)$

Considerando $a=0.9$, para calcular la respuesta aplicamos el principio de superposición. Es decir, calculamos $|H(\omega)|$ y $\Theta(\omega)$ para cada componente de la entrada.

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a \operatorname{sen} \omega}{1-a \cos \omega}$$

$$y[n] = 5|H(0)| + 5 \left| H\left(\frac{\pi}{16}\right) \right| \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{16} n + \Theta\left(\frac{\pi}{16}\right) \right] - 5 \left| H\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right| \cos \left[\frac{3\pi}{4} n + \frac{\pi}{4} + \Theta\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

13. Respuesta frecuencial de los sistemas LTI

Ejemplo

$$y[n] = ay[n-1] + bx[n], \quad 0 < a < 1$$

$$\text{Entrada: } x[n] = 5 + 12\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20\text{cos}\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Considerando $a=0.9$, para calcular la respuesta aplicamos el principio de superposición. Es decir, calculamos $|H(\omega)|$ y $\Theta(\omega)$ para cada componente de la entrada.

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\angle H(\omega) = \Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a \text{sen } \omega}{1-a \cos \omega}$$

$$y[n] = 5|H(0)| + 5\left|H\left(\frac{\pi}{16}\right)\right| \text{sen}\left[\frac{\pi}{16}n + \Theta\left(\frac{\pi}{16}\right)\right] - 5\left|H\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| \text{cos}\left[\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{4} + \Theta\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

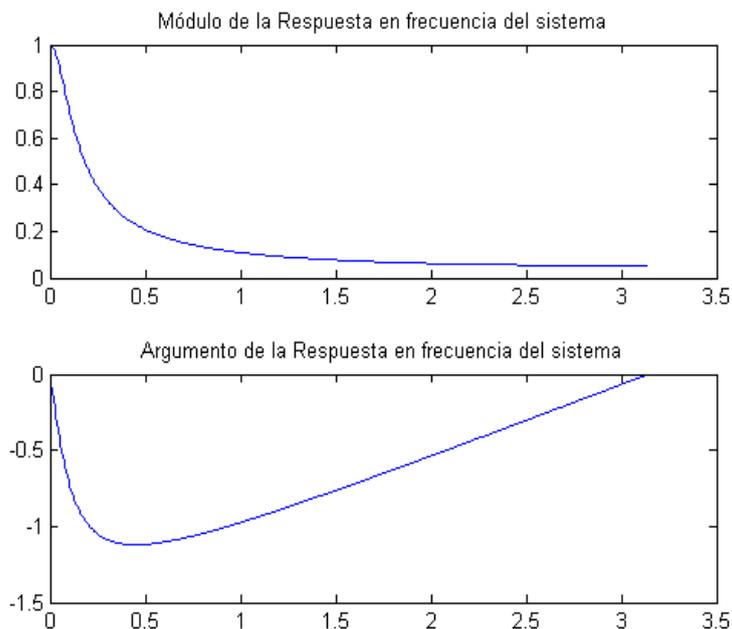
$$|H(0)| = 1$$

$$\left|H\left(\frac{\pi}{16}\right)\right| = 0.47$$

$$\left|H\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right| = 0.056$$

Las frecuencias más altas son las más atenuadas
Filtro paso de baja

13. Respuesta frecuencial LTI



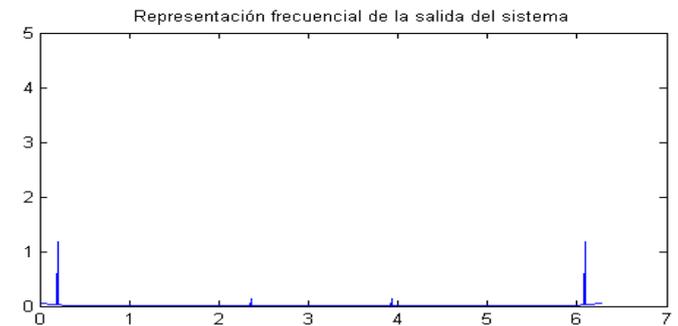
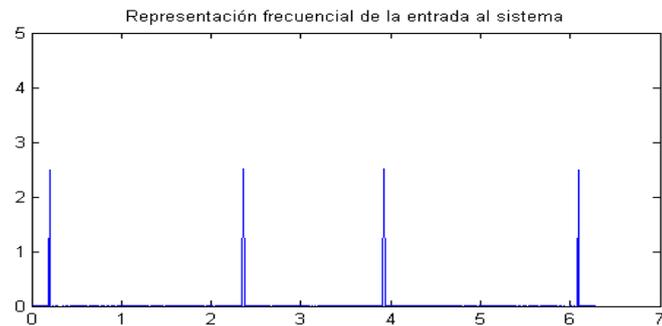
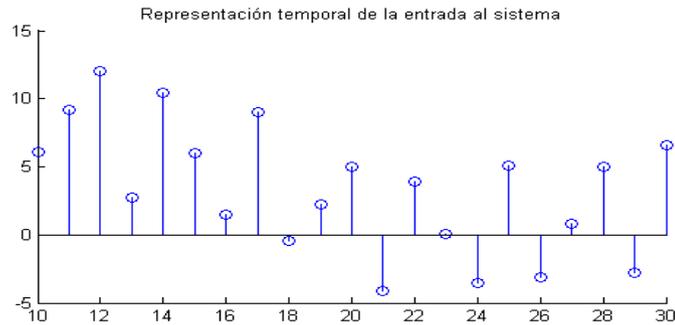
```
% ejemplo de respuesta en frecuencia de sistema dado por la ecuación
% en diferencias  $y[n]=ay[n-1]+bx[n]$ ,  $a=0.9$ ,  $b=1-a$ , para obtener
% respuesta
% en frecuencia unidad.
%FREQZ Digital filter frequency response.
%[H,W] = FREQZ(B,A,N) returns the N-point complex frequency response
%vector H and the N-point frequency vector W in radians/sample of
% the filter:
%      
$$H(e^{j\omega}) = \frac{b(1) + b(2)e^{-j\omega} + \dots + b(m+1)e^{-jm\omega}}{a(1) + a(2)e^{-j\omega} + \dots + a(n+1)e^{-jn\omega}}$$

%      given numerator and denominator coefficients in vectors B and A. The
% frequency response is evaluated at N points equally spaced around
% the upper half of the unit circle. If N isn't specified, it defaults to
% 512.
a=0.9;
b=1-a;
N=512;

[W,H]=freqz([1-a],[1;-a],N);

subplot(211);
plot(abs(H),W);
title('Módulo de la Respuesta en frecuencia del sistema');
subplot(212);
plot(angle(H),W);
title('Argumento de la Respuesta en frecuencia del sistema');
```

13. Respuesta frecuencial LTI



```
% veamos como responde este sistema ante la entrada x, para ello
%usamos la función filter
n=0:N-1;
x=5+5*sin(pi/16*n)-5*cos(3*pi*n/4+pi/4);
y=filter([1-a],[1;-a],x);
Y=1/N*fft(y,N);
X=1/N*fft(x,N);
```

```
figure
subplot(221)
stem(x);
title('Representación temporal de la entrada al sistema');
subplot(222)
stem(y);
title('Representación temporal de la salida del sistema');
subplot(223)
plot((0:N-1)*2*pi/N,abs(X));
title('Representación frecuencial de la entrada al sistema');
subplot(224)
plot((0:N-1)*2*pi/N,abs(Y));
title('Representación frecuencial de la salida del sistema');
```

13. Respuesta frecuencial LTI

Sistema definido por una función racional

Considerando lo ya expuesto de que si la función de transferencia de un sistema ($H(z)$) converge en la circunferencia unidad podemos obtener la transformada de Fourier de dicho sistema evaluando $H(z)$ en dicho sistema, tenemos.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^P a_k z^{-k}} \quad H(e^{j\omega})|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^P a_k e^{-j\omega k}}$$

Es conveniente disponer de expresiones correspondientes al módulo y la fase de esta respuesta y por ello es bueno considerar la expresión en función de los polos y los ceros

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 \prod_{k=0}^Q (1 - c_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=0}^P (1 - d_k e^{-j\omega})}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=0}^Q |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=0}^P |1 - d_k e^{-j\omega}|}$$

$$\Psi(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = \arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \sum_{k=0}^Q \arg\{1 - c_k e^{-j\omega}\} - \sum_{k=0}^P \arg\{1 - d_k e^{-j\omega}\}$$

13. Respuesta frecuencial LTI

Sistema definido por una función racional

Normalmente se utiliza una escala logarítmica y los términos de ganancia y atenuación.

$$G(\omega) = 20 \log |H(e^{j\omega})| \qquad \alpha(\omega) = 20 \log \frac{H_{ref}}{|H(e^{j\omega})|}$$

El polo y el cero contribuyen de forma aditiva a la ganancia total del filtro.

$$G(\omega) = 20 \log \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=0}^Q 20 \log |1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=0}^P 20 \log |1 - d_k e^{-j\omega}|$$

En el estudio de un filtro más que su respuesta en fase, interesa la linealidad de esta respuesta. Por ello se define el parámetro retardo de grupo.

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg \{ H(e^{j\omega}) \} = \sum_{k=0}^Q \frac{d}{d\omega} \arg \{ 1 - d_k e^{-j\omega} \} - \sum_{k=0}^P \frac{d}{d\omega} \arg \{ 1 - c_k e^{-j\omega} \}$$

Si el retardo de grupo es constante, el sistema será lineal.

13. Respuesta frecuencial LTI

Sistema definido por una función racional

Interpretación geométrica:

Vamos a reformular la ecuación de transferencia de la forma

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(P-Q)\omega} \frac{b_0 \prod_{k=0}^Q (e^{j\omega} - c_k)}{a_0 \prod_{k=0}^P (e^{j\omega} - d_k)}$$

Con lo que las expresiones para el módulo y la fase quedan.

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^Q |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{k=0}^P |e^{j\omega} - d_k|} \right|$$

$$\Psi(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = (P-Q)\omega + \arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \sum_{k=0}^Q \arg\{e^{j\omega} - c_k\} - \sum_{k=0}^P \arg\{e^{j\omega} - d_k\}$$

13. Respuesta frecuencial LTI

Sistema definido por una función racional

Interpretación geométrica:

Con lo que las expresiones para el módulo y la fase quedan.

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=0}^Q |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{k=0}^P |e^{j\omega} - d_k|} \right|$$
$$\Psi(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\} = (P - Q)\omega + \arg\left\{\frac{b_0}{a_0}\right\} + \sum_{k=0}^Q \arg\{e^{j\omega} - c_k\} - \sum_{k=0}^P \arg\{e^{j\omega} - d_k\}$$

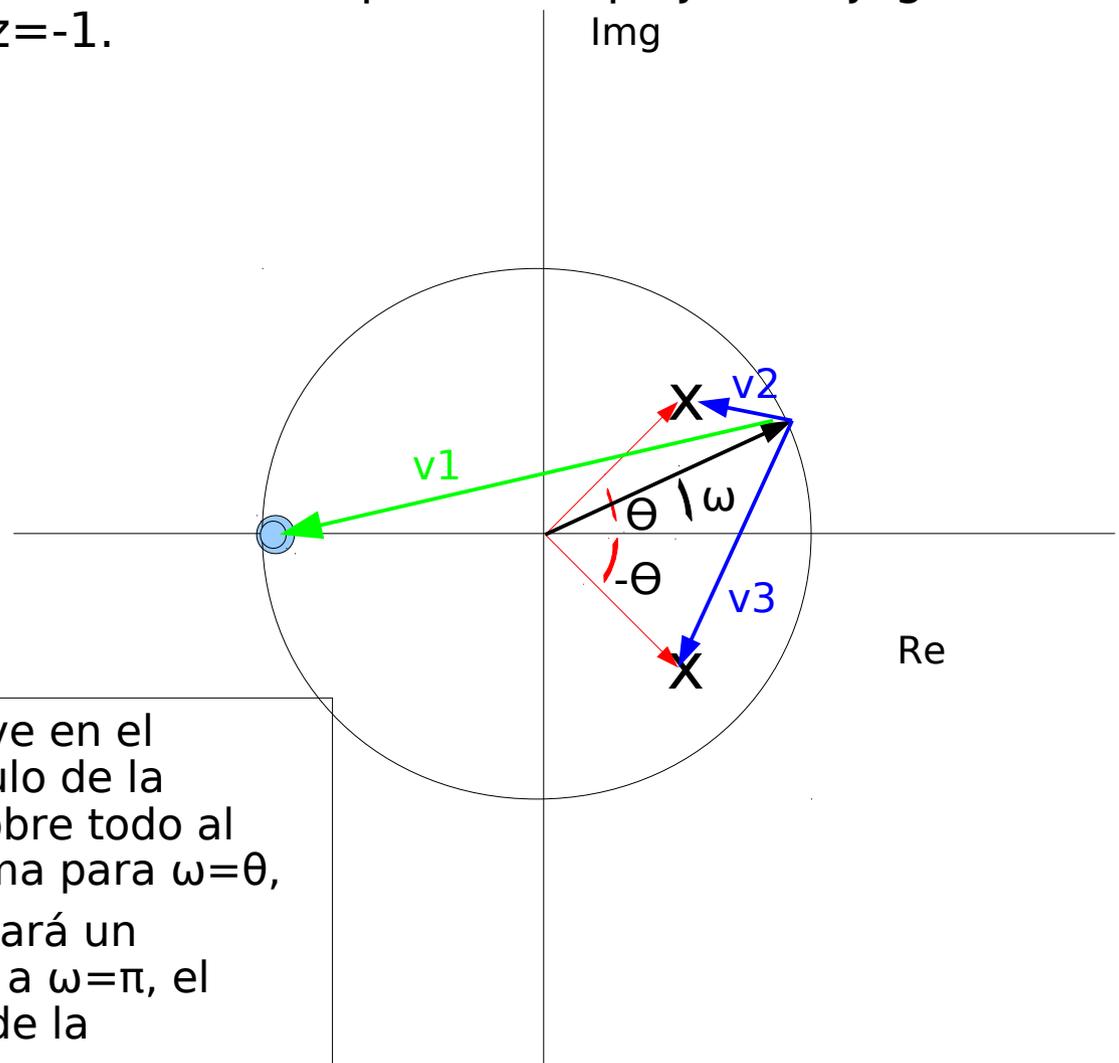
Interpretando $e^{j\omega}$, los ceros c_k y los polos d_k como vectores del plano z , la contribución de los términos $|e^{j\omega} - a_k|$ al módulo de la respuesta frecuencial se corresponde con la distancia entre el polo o cero a_k y el fasor $e^{j\omega}$ según se desplaza por la circunferencia unidad. La fase se obtiene, acumulando con el signo adecuado, el ángulo del vector diferencia entre el fasor $e^{j\omega}$ y cada uno de los ceros y polos.

13. Respuesta frecuencial LTI

Sistema definido por una función racional

Interpretación geométrica de un sistema con dos polos complejos conjugados de $r=0,8$ y fase θ , y dos ceros en $z=-1$.

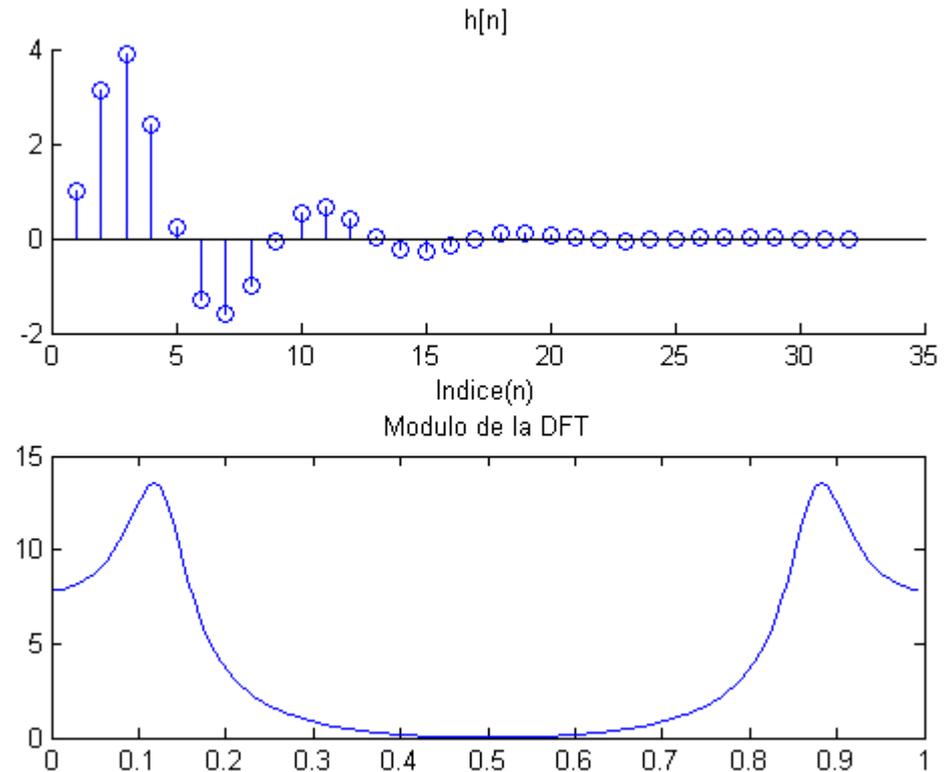
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|v_1||v_2|}{|v_3|}$$



Cuando el ángulo del vector $e^{j\omega}$ se mueve en el entorno de θ , las fluctuaciones del módulo de la función de transferencia son debidas sobre todo al valor de $|v_2|$. La longitud de $|v_2|$ es mínima para $\omega=\theta$, por lo que el módulo de la señal presentará un máximo a esa frecuencia. Al acercarnos a $\omega=\pi$, el vector v_1 tiende a anularse y el módulo de la respuesta frecuencial disminuye.

13. Respuesta frecuencial LTI Sistema definido por una función racional

```
N=128;  
k=0:N-1;  
imp=zeros(N,1);  
imp(1)=1;  
yk=filter([1,2,1],[1,-1.13,0.64],imp);  
Y=fft(yk);  
subplot(211)  
A=round(N./4);  
x=yk(1:A);  
stem(x);  
title('h[n]'),xlabel('Indice(n)')  
subplot(212)  
plot(k/N,abs(Y))  
title('Modulo de la DFT')
```



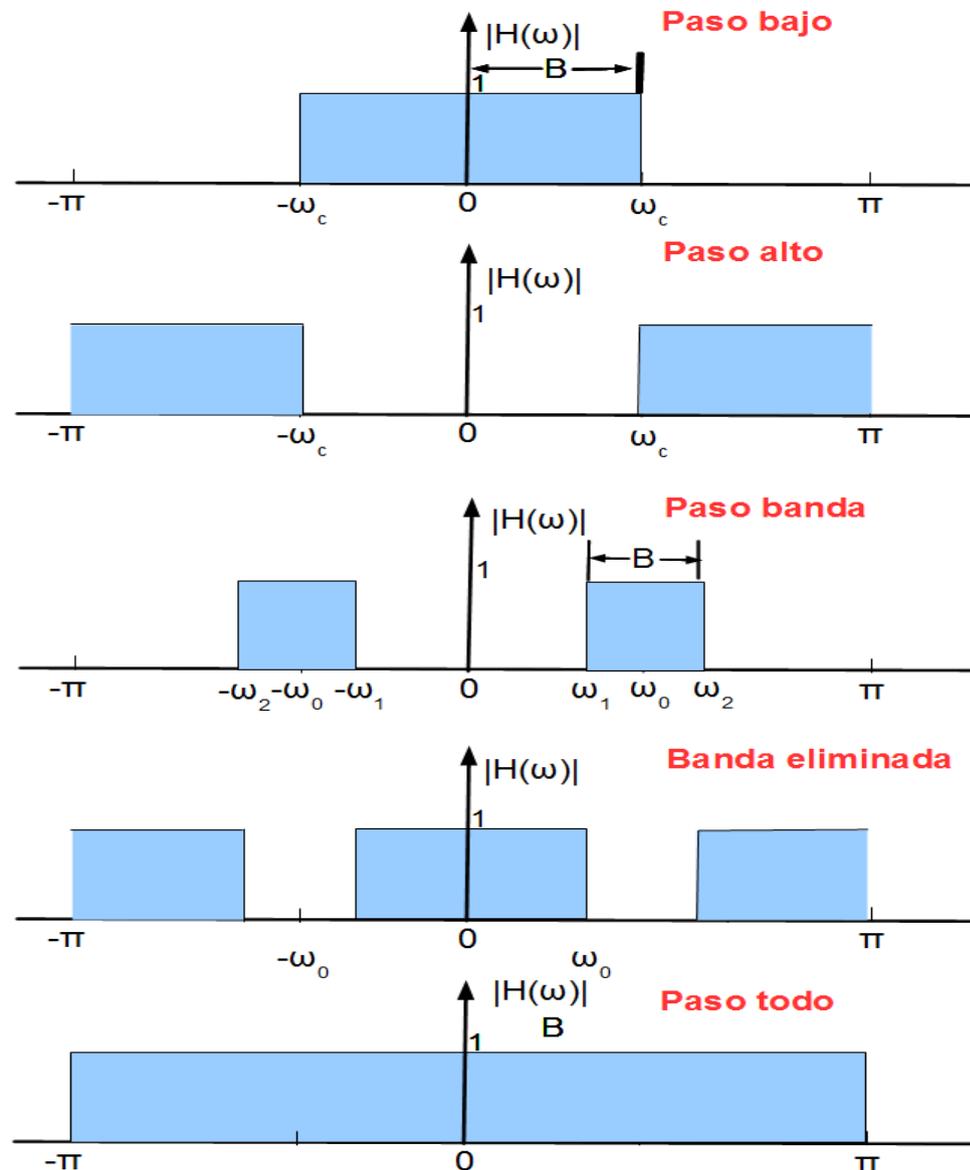
Cero doble en $z_{1,2} = -1$ y polos complejos conjugados en $p_{1,2} = e^{\pm j\pi/4}$

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Como ya hemos visto un sistema LTI realiza una función de discriminación o filtrado entre las distintas componentes de su entrada, dependiendo de su respuesta en frecuencia $H(\omega)$.

A su vez podemos determinar $H(\omega)$ en función de como elijamos sus parámetros que vienen dados por los coeficientes de la ecuación en diferencias que describen el sistema.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia



14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Los filtros ideales presentan una ganancia constante en la banda de paso y cero en la eliminada, además la respuesta en fase es lineal.

Supongamos que se hace pasar una señal $x[n]$ con sus componentes confinadas en el rango $\omega_1 < \omega < \omega_2$ a través de un filtro cuya respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad C \text{ y } n_0 \text{ constantes}$$

Espectro de la señal de salida

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = CX(\omega) e^{-j\omega n_0} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Espectro de la señal de salida

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = CX(\omega) e^{-j\omega n_0} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$

Aplicando cambio de escala y desplazamiento de frecuencia

$$y[n] = C x[n - n_0]$$

La salida es una versión retardada con amplitud escalada de la señal de entrada que esté confinada en ese rango de frecuencias. Esto no se considera distorsión.

La fase debe ser lineal y por lo tanto el retardo de grupo constante

$$\Theta(\omega) = -\omega n_0 \quad \tau_g = \frac{-d\Theta(\omega)}{d(\omega)} = n_0 = cte$$

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Los filtros ideales no pueden implementarse físicamente

Por ejemplo supongamos que el caso anterior es un filtro paso de bajo

$$h_{lp}[n] = C \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}[(n-n_0)\omega_c]}{(n-n_0)\omega_c} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

El filtro no es causal ni estable y por tanto no puede implementarse. Para poder implementarlo, es necesario limitar el número de muestras en el tiempo. De esta manera se consiguen aproximaciones válidas en la práctica.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

Sea $x[n]$ la señal que se va a analizar. Limitar el número de muestras de la misma a L equivale a su multiplicación por una ventana rectangular de longitud L .

$$\hat{x}[n] = x[n]w[n]$$
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que $x[n]$ es una señal senoidal y apliquemos la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier.

$$x[n] = \cos \omega_0 n$$
$$e^{j\omega_0 n} y[n] = Y(\omega - \omega_0)$$

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

$$W(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

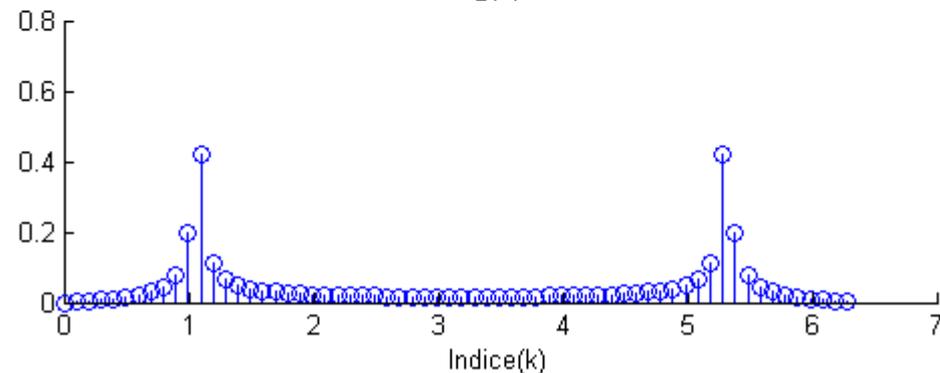
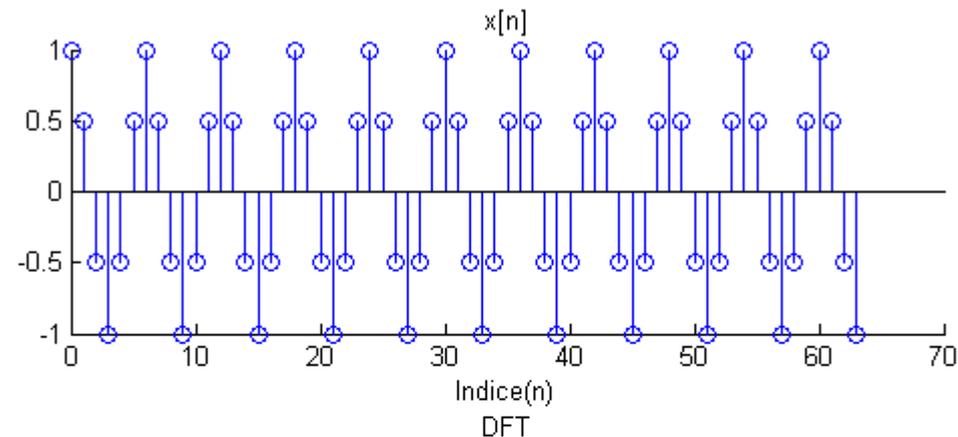
Efectos de la limitación del número de muestras temporales

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)]$$

$$W(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$

```
L=64  
nn=0:L-1;  
xx=cos(pi*nn/3);  
XX=1/L*fft(xx);  
  
subplot(211)  
stem(nn,xx)  
title('x[n]'),xlabel('Indice(n)')
```

```
subplot(212)  
  
stem(nn*2*pi/(L-1),abs(XX))  
title('DFT'),xlabel('Indice(k)')
```



Efecto de fuga: la frecuencia de la señal original centrada en una sola frecuencia se ha extendido. Dependiente de los lóbulos secundarios de la ventana

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

No solo existe el efecto de fuga, también se reduce la resolución espectral. Consideremos el siguiente caso.

$$x[n] = \cos \omega_1 n + \cos \omega_2 n \quad \hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega + \omega_2)]$$

El espectro de la ventana rectangular $W(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$

Presenta su primer paso por cero en $\omega = 2\pi/L$. Si $|\omega_1 - \omega_2| < 2\pi/L$, las dos funciones de la ventana $W(\omega - \omega_1)$ y $W(\omega - \omega_2)$ se solapan y en consecuencia las líneas espectrales de $x[n]$ no se diferencian. La capacidad para obtener líneas espectrales de diferentes frecuencias está limitada por la anchura del lóbulo principal de la ventana.

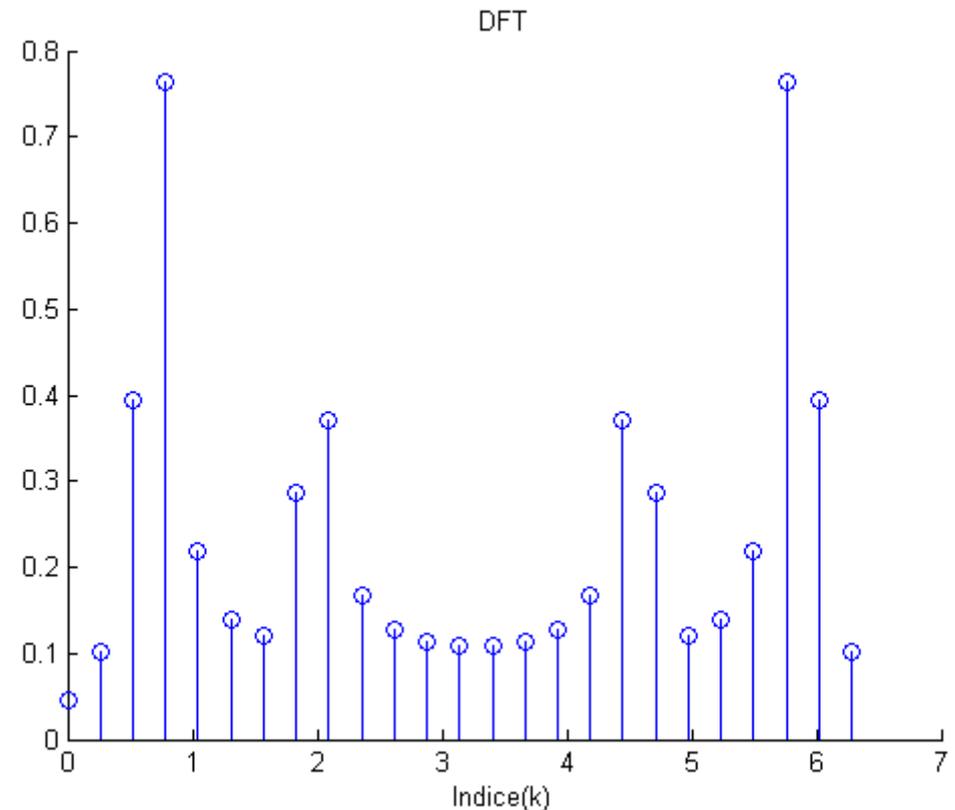
14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

Ejemplo:

```
L=25  
nn=0:L-1;  
xx=cos(0.2*pi*nn)  
+cos(0.22*pi*nn)+cos(0.6*pi*nn);  
XX=1/L*fft(xx);
```

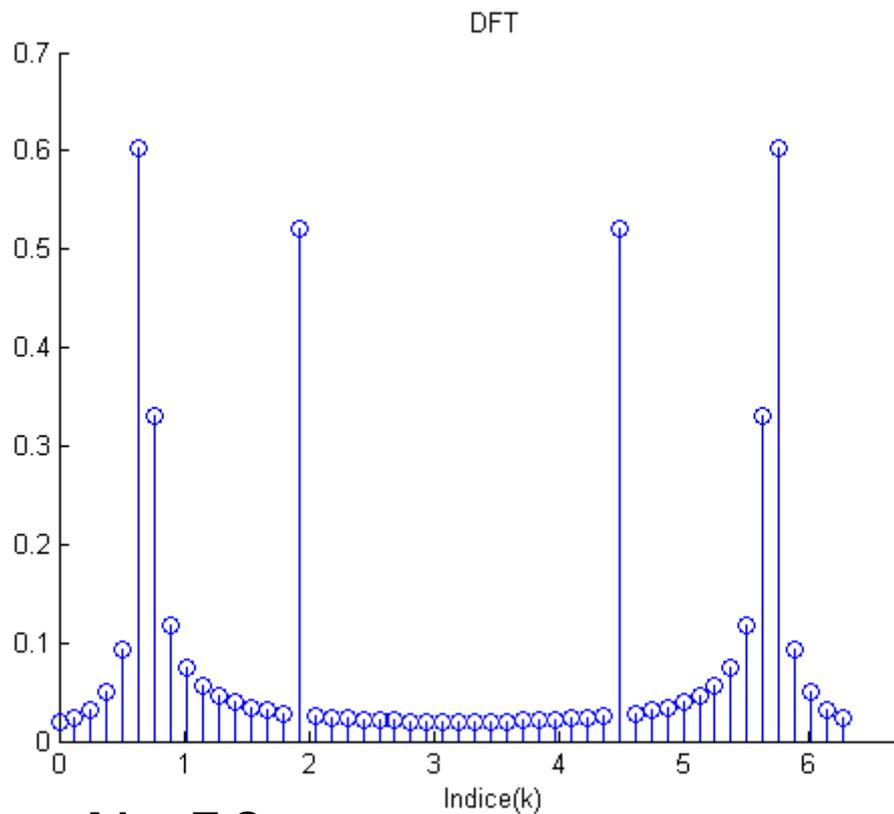
```
stem(nn*2*pi/(L-1),abs(XX))  
title('DFT'),xlabel('Indice(k)')
```



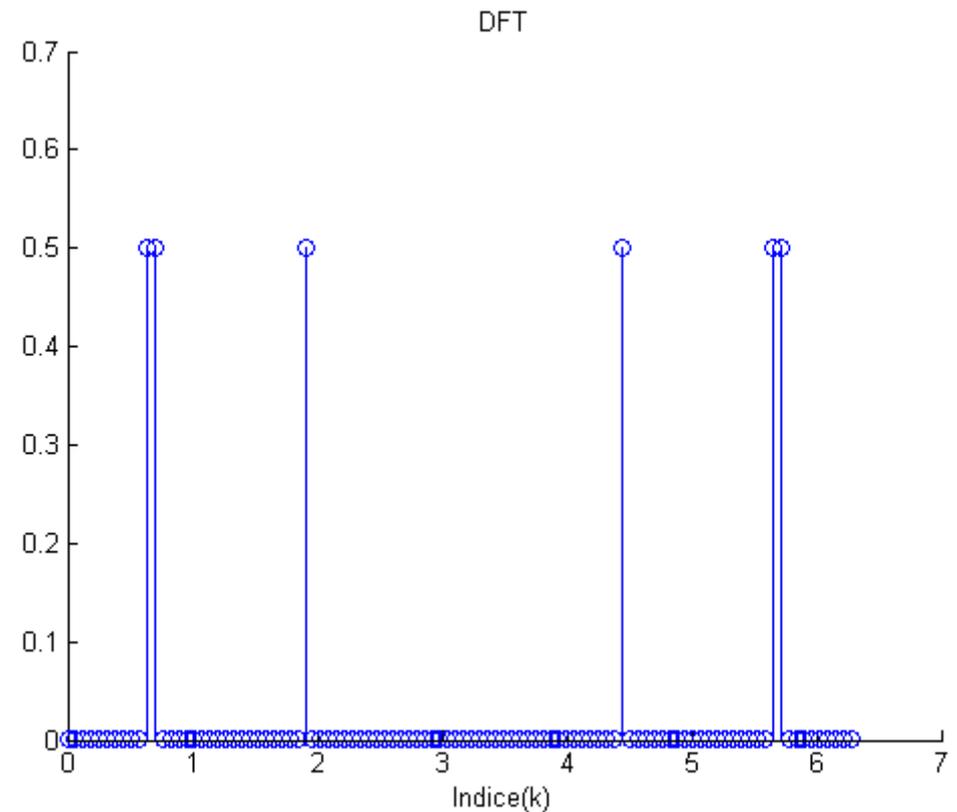
14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

Ejemplo:



N=50



N=100

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

Considerando una señal en general $x[n]$, la relación entre su transformada de Fourier y la de la que se obtiene pasándola por la ventana, viene dada por la fórmula de convolución:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$
$$\hat{X}(k) \equiv \hat{X}(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) W\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta\right) d\theta \quad k=0,1,\dots,N-1$$

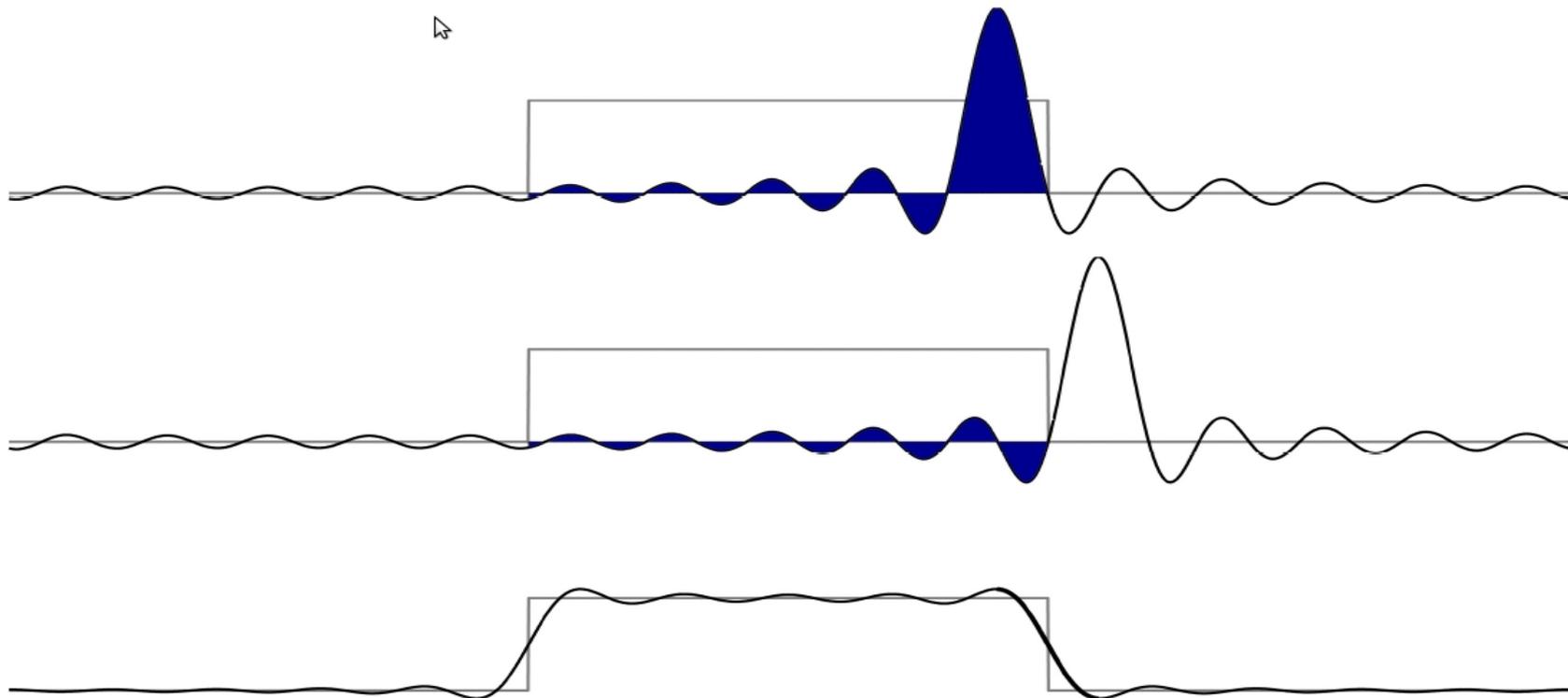
El espectro de la ventana debe ser estrecho en comparación con el de la señal $X(\omega)$, de lo contrario el espectro de la ventana enmascara el de la señal.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Efectos de la limitación del número de muestras temporales

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$

$$\hat{X}(k) \equiv \hat{X}(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) W\left(\frac{2\pi k}{N} - \theta\right) d\theta \quad k=0,1,\dots,N-1$$



14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Diseño de Filtros digitales simples mediante ubicación de polos y ceros:

Principio básico: colocar los polos cerca de los puntos de la circunferencia unidad correspondientes a las frecuencias que se desean acentuar y los ceros cerca de las que se desean atenuar.

Restricciones:

1. Filtro estable: polos dentro de la circunferencia unidad.
2. Coeficientes reales: polos y ceros complejos conjugados.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda:

Paso bajo: polos cerca de la circunferencia unidad cerca de $\omega=0$ y los ceros en las frecuencias altas, $\omega=\pi$

Ejemplos:

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

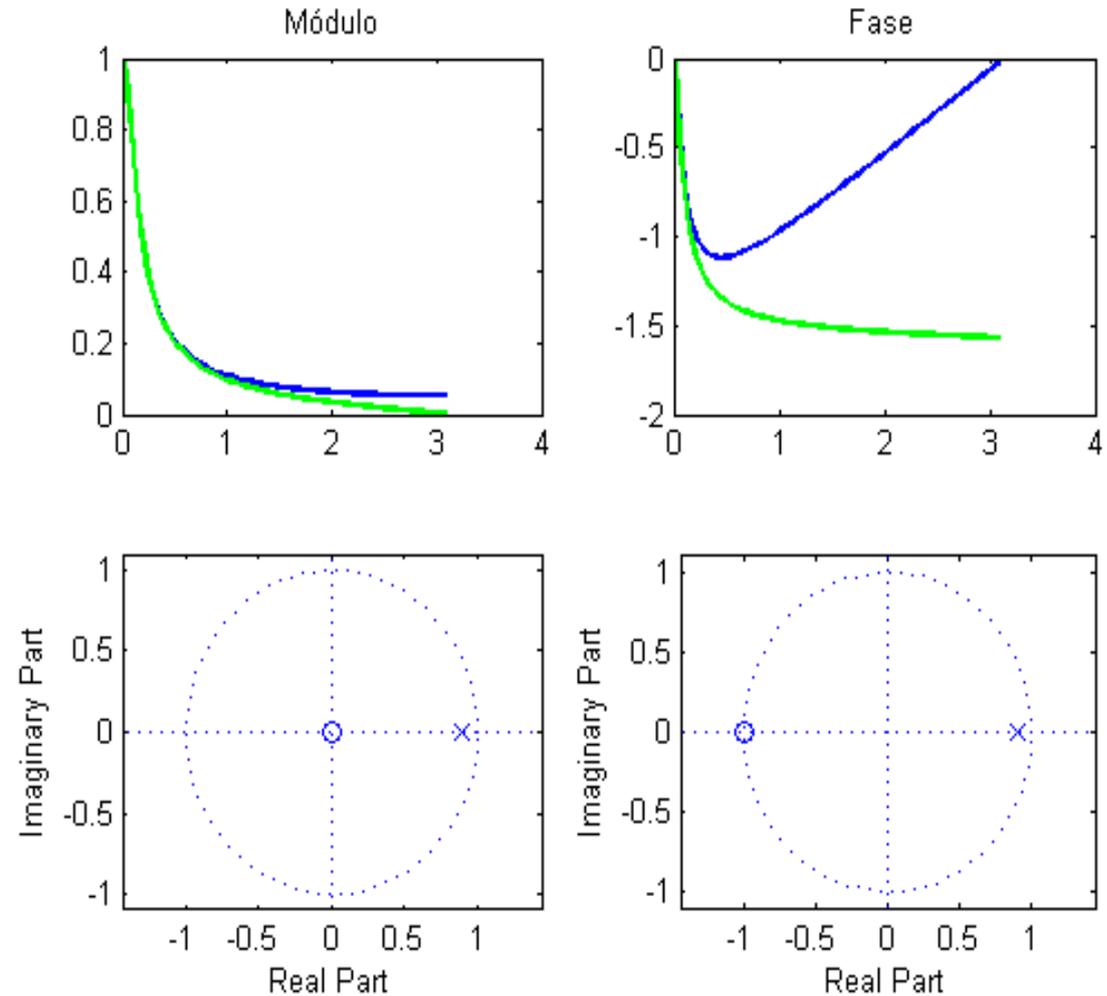
Se han elegido las funciones de transferencia para que la ganancia en $\omega=0$ sea 1.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Paso bajo: $H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

```
N=64;  
a=0.9;  
num1=[1-a];  
den1=[1,-a];  
[H1,W]=freqz(num1,den1,N);  
num2=[1-a,1-a];  
den2=[2,-2*a];  
[H2,W]=freqz(num2,den2,N);  
subplot(2,2,1)  
plot(W,abs(H1), 'LineWidth',2);hold on  
plot(W,abs(H2),'g','LineWidth',2);  
hold off  
title('Módulo')  
subplot(2,2,2)  
plot(W,angle(H1), 'LineWidth',2);hold on  
plot(W,angle(H2),'g','LineWidth',2);  
hold off  
title('Fase')  
subplot(2,2,3)  
zplane(num1,den1);  
subplot(2,2,4)  
zplane(num2,den2);
```



H_1

H_2

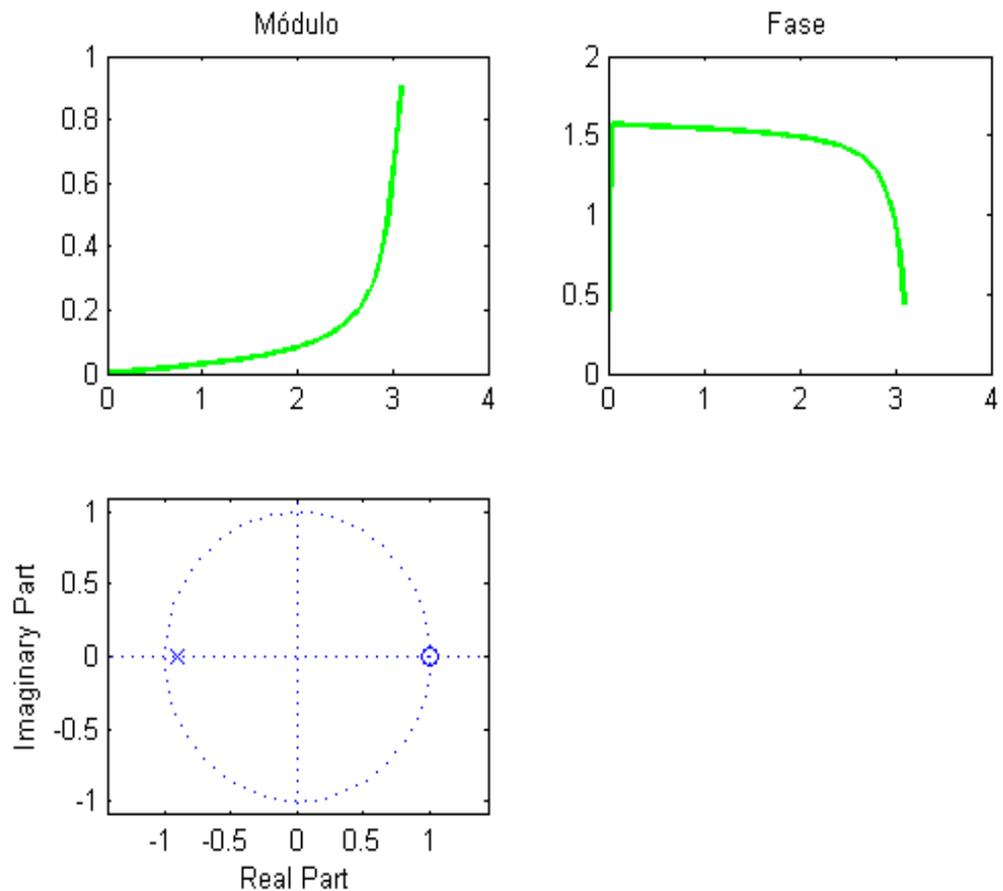
14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda:

Paso alto: polos cerca de la circunferencia unidad cerca de $\omega=\pi$ y los ceros en las frecuencias altas, $\omega=0$

Ejemplo:
$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$$

```
N=64;  
a=0.9;  
num3=[1-a,-1+a];  
den3=[2,2*a];  
[H3,W]=freqz(num3,den3,N);  
subplot(2,2,1)  
plot(W,abs(H3),'g','LineWidth',2);  
title('Módulo')  
subplot(2,2,2)  
plot(W,angle(H3),'g','LineWidth',2);  
title('Fase')  
subplot(2,2,3)  
zplane(num3,den3);
```



14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda:

Paso banda: debe contener uno o más pares de polos complejos conjugados próximos a la circunferencia unidad en las vecindades de la banda de frecuencias que define la banda de paso del filtro.

Ejemplo: filtro paso de banda cuya banda de paso tenga centro en $\omega = \pi/2$. La respuesta en frecuencia debe ser 0 en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ y el módulo $1/\sqrt{2}$ en $\omega = 4\pi/9$.

Polos: $p_{1,2} = r e^{\pm j\pi/2}$

Ceros: $z = 1$ $z = -1$

$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

Determinar G:

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{2}{1-r^2} = 1$$
$$G = \frac{1-r^2}{2}$$

$$H(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda:

Ejemplo: filtro paso de banda cuya banda de paso tenga centro en $\omega = \pi/2$. La respuesta en frecuencia debe ser 0 en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ y el módulo $1/\sqrt{2}$ en $\omega = 4\pi/9$.

$$H(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

Determinar r:

$$\left| H\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)} = \frac{1}{2}$$

$r^2 = 0.7$ *satisface esta ecuación*

$$H(z) = 0.15 \frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

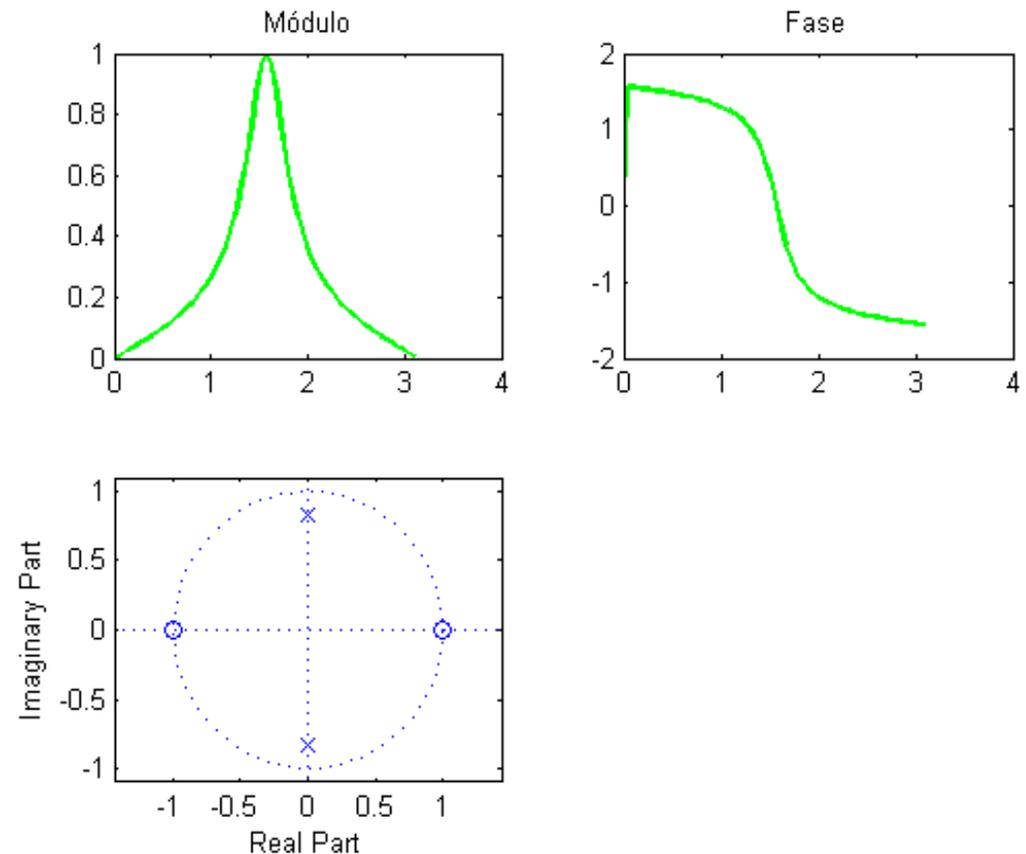
14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros paso alto, paso bajo y paso banda:

Ejemplo: filtro paso de banda cuya banda de paso tenga centro en $\omega=\pi/2$. La respuesta en frecuencia debe ser 0 en $\omega=0$ y $\omega=\pi$ y el módulo $1/\sqrt{2}$ en $\omega=4\pi/9$.

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-2}}$$

```
N=64;  
num=[0.15,0,-0.15];  
den=[1,0,0.7];  
[H,W]=freqz(num,den,N);  
subplot(2,2,1)  
plot  
(W,abs(H),'g','LineWidth',2);  
title('Módulo')  
subplot(2,2,2)  
plot  
(W,angle(H),'g','LineWidth',2);  
title('Fase')  
subplot(2,2,3)  
zplane(num,den);
```



14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Transformación de un filtro paso bajo en uno paso alto :

Si $h_{lp}[n]$ expresa la respuesta al impulso de un filtro paso bajo con respuesta en frecuencia $H_{lp}(\omega)$ podemos obtener la respuesta de un filtro paso alto $H_{hp}(\omega)$ trasladando π radianes.

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi)$$

Si aplicamos la propiedad de traslación en frecuencia de la transformada de Fourier:

$$h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$$

La respuesta al impulso de un filtro paso alto, se obtiene a partir de la del paso de baja, cambiando los signos de las muestras impares.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Resonador Digital : son filtros que presentan un pico a una frecuencia próxima a ω_0 , para ello se deben seleccionar los polos complejos conjugados : $p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$

$$H(z) = G \frac{b_0}{(1 - r e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - r e^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

Normalizamos para calcular b_0

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{(1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos 2\omega_0}} = 1$$

Podemos poner la respuesta en frecuencia del resonador como:

$$|H(\omega)| = \frac{b_0}{U_1(\omega)U_2(\omega)}$$
$$\Theta(\omega) = 2\omega - \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)$$

$U_1(\omega)$ y $U_2(\omega)$ son los módulos de los vectores que van desde p_1 y p_2 al punto ω situado en la circunferencia unidad y $\phi_1(\omega)$ $\phi_2(\omega)$ los ángulos de dichos vectores.

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Resonador Digital : son filtros que presentan un pico a una frecuencia próxima a ω_0 , para ello se deben seleccionar los polos complejos conjugados : $p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$

$$U_1(\omega) = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega_0 - \omega)}$$
$$U_2(\omega) = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega_0 + \omega)}$$

Para cualquier valor de r $U_1(\omega)$ toma su valor mínimo en $\omega = \omega_0$. El producto $U_1(\omega)U_2(\omega)$ alcanza su valor mínimo en la frecuencia

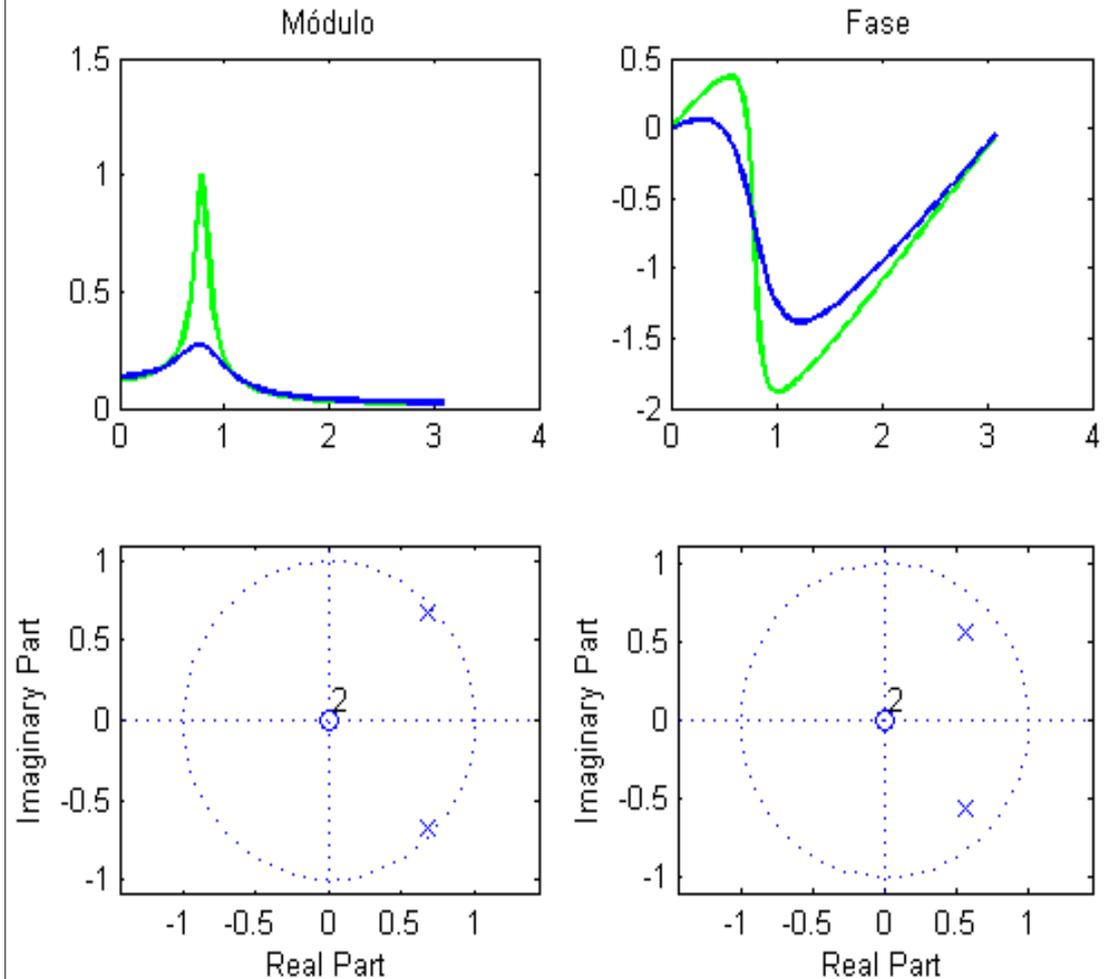
$$\omega_r = \cos^{-1} \left(\frac{1 + r^2}{r} \cos \omega_0 \right)$$

Esto nos indica que cuando r es próximo a la unidad ω_r se aproxima a ω_0

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Resonador Digital :

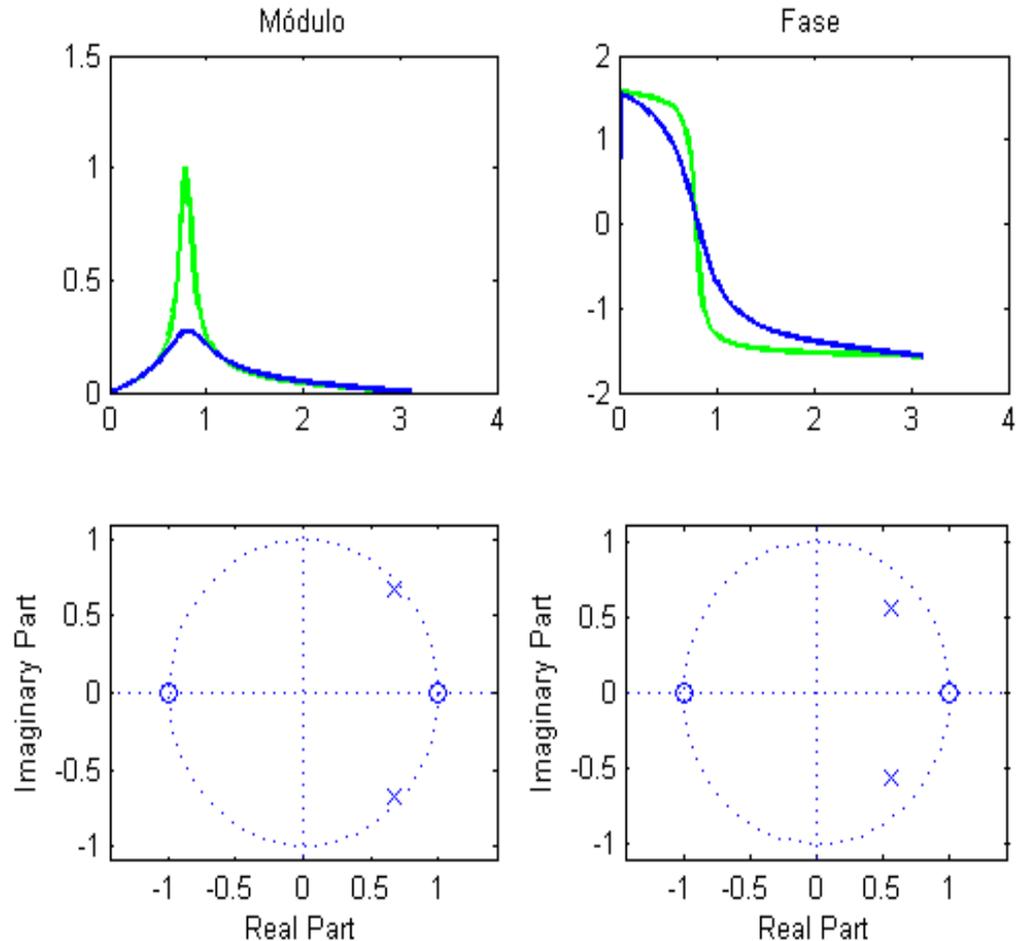
```
N=64;  
w0=pi/4;  
r1=0.95;  
r2=0.8;  
b01=(1-r1)*(1+r1^2-2*r1*cos(2*w0))^0.5;  
b02=(1-r2)*(1+r2^2-2*r2*cos(2*w0))^0.5;  
num1=[b01];  
den1=[1,-2*r1*cos(w0),r1^2];  
[H1,W]=freqz(num1,den1,N);  
num2=[b02];  
den2=[1,-2*r2*cos(w0),r2^2];  
[H2,W]=freqz(num2,den2,N);  
subplot(2,2,1)  
plot(W,abs(H1),'g','LineWidth',2);hold on  
plot(W,abs(H2),'b','LineWidth',2);hold off  
title('Módulo')  
subplot(2,2,2)  
plot(W,angle(H1),'g','LineWidth',2);hold on  
plot(W,angle(H2),'b','LineWidth',2);hold off  
title('Fase')  
subplot(2,2,3)  
zplane(num1,den1);  
subplot(2,2,4)  
zplane(num2,den2);
```



14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Resonador Digital :

```
N=128;  
w0=pi/4;  
r1=0.95;  
r2=0.8;  
b01=(1-r1)*(1+r1^2-2*r1*cos(2*w0))^0.5 /  
(2-2*cos(2*w0))^0.5;  
b02=(1-r2)*(1+r2^2-2*r2*cos(2*w0))^0.5 /  
(2-2*cos(2*w0))^0.5;  
num1=[b01 0 -b01];  
den1=[1,-2*r1*cos(w0),r1^2];  
[H1,W]=freqz(num1,den1,N);  
num2=[b02 0 -b02];  
den2=[1,-2*r2*cos(w0),r2^2];  
[H2,W]=freqz(num1,den2,N);  
subplot (2,2,1)  
plot (W,abs(H1),'g','LineWidth',2);hold on  
plot (W,abs(H2),'b','LineWidth',2);hold off  
title('Módulo')  
subplot (2,2,2)  
plot (W,angle(H1),'g','LineWidth',2);hold on  
plot (W,angle(H2),'b','LineWidth',2);hold off  
title('Fase')  
subplot (2,2,3)  
zplane(num1,den1);  
subplot (2,2,4)  
zplane(num2,den2);
```

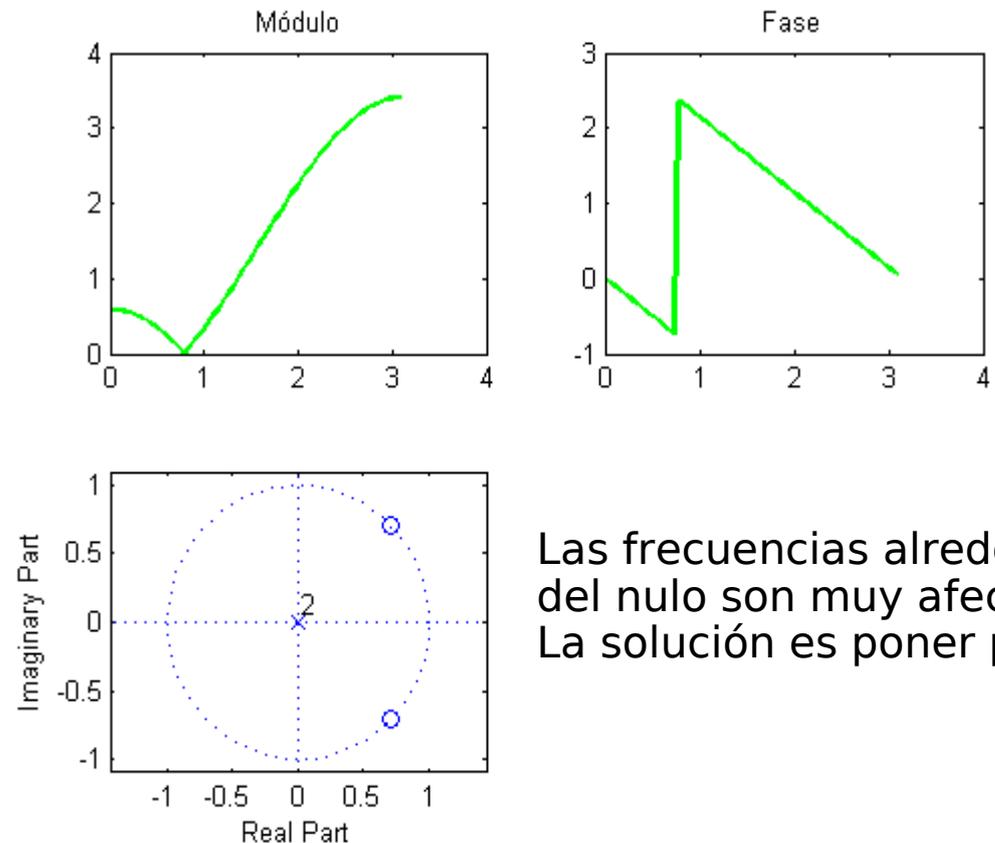


14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros de hendidura : se hacen cero a determinadas frecuencias. Para ello creamos ceros complejos conjugados en las frecuencias que queremos eliminar.

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$
$$H(z) = b_0(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1}) = b_0(1 - 2\cos\omega_0z^{-1} + z^{-2}) \quad \text{FIR}$$

```
N=64;  
w0=pi/4;  
num=[1,-2*cos(pi/4),+1];  
den=[1];  
[H,W]=freqz(num,den,N);  
subplot (2,2,1)  
plot (W,abs(H),'g','LineWidth',2);  
title('Módulo')  
subplot (2,2,2)  
plot (W,angle(H),'g','LineWidth',2);  
title('Fase')  
subplot (2,2,3)  
zplane(num,den);
```



Las frecuencias alrededor del nulo son muy afectadas
La solución es poner polos

14. Sistemas LTI como filtros selectivos de frecuencia

Filtros de hendidura : Añadimos polos. Se introduce resonancia en las vecindades del cero y con eso reducimos el ancho de banda

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

$$p_{1,2} = r e^{\pm j\omega_0}$$

$$H(z) = \frac{b_0(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad IIR$$

```
N=64;
w0=pi/4;
r1=0.9;
r2=0.4;
num1=[1,-2*cos(pi/4),+1];
den1=[1,-2*r1*cos(pi/4),r1^2];
[H1,W]=freqz(num1,den1,N);
num2=[1,-2*cos(pi/4),+1];
den2=[1,-2*r2*cos(pi/4),r2^2];
[H2,W]=freqz(num1,den2,N);
subplot(2,2,1)
plot(W,abs(H1),'g','LineWidth',2);hold on
plot(W,abs(H2),'b','LineWidth',2);hold off
title('Módulo')
subplot(2,2,2)
plot(W,angle(H1),'g','LineWidth',2);hold on
plot(W,angle(H2),'b','LineWidth',2);hold off
title('Fase')
subplot(2,2,3)
zplane(num1,den1);
subplot(2,2,4)
zplane(num2,den2);
```

